Cours de mathématiques

Thomas Rey

classe de première L

Table des matières

Chapitre 1

Les pourcentages

1.1 Variation en pourcentage

1.1.1 Calcul d'une variation

Propriété 1.1
Si une quantité passe d'une valeur x_0 à une valeur x_1 sa variation en pourcentage vaut :

$$\frac{x_1 - x_0}{x_0} \times 100$$

Exemple 1.1
Au cours d'un mois, le prix du baril de pétrole est passé de 68 \$ à 72 \$. En pourcentage, son augmentation est de :

$$\frac{72 - 68}{68} \times 100 \approx 5{,}88$$

Le prix du baril a augmenté d'environ 5,88 %.

1.1.2 Expression d'une variation en pourcentage

Propriété 1.2
Augmenter un nombre de x % revient à le multiplier par $(1 + \frac{x}{100})$. De même, diminuer un nombre de x % revient à le multiplier par $(1 - \frac{x}{100})$.

En effet, soit A un nombre. L'augmentation de A de x % vaut : $A \times \frac{x}{100}$. Donc, le nombre A augmenté de x % vaut : $A + A \times \frac{x}{100} = A(1 + \frac{x}{100})$.

Exemple 1.2
Un ordinateur coûtait 1300 €. Maurice obtient une réduction de 15 %. Il va payer :

$$1300 \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 1300 \times 0{,}85 = 1105 \text{ €}.$$

Exemple 1.3
Le baril de pétrole brut coûtait 62 \$. Il a augmenté de 5 %. Il coûte désormais :

$$62 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 62 \times 1{,}05 = 65{,}1 \text{ \$ le baril}.$$

Exemple 1.4
Sur mon livret d'épargne, je possède 553,50 €. Il y a un an j'avais 540 €, et je n'ai fait ni versement, ni retrait. Le coefficient d'augmentation est de $\frac{553{,}5}{540} = 1{,}025$. Donc le taux d'intérêts de mon livret est de $1{,}025 - 1 = 0{,}025 = 2{,}5$ % par an.

1.2 Plusieurs pourcentages

1.2.1 Pourcentage de pourcentage

Propriété 1.3
Prendre t_1 % de t_2 % d'un nombre A c'est effectuer le calcul suivant :

$$\frac{t_1}{100} \times \frac{t_2}{100} \times A$$

Exemple 1.5
Dans une classe de 32 élèves, 75 % des élèves étudient l'anglais en LV1, et parmi eux, 37,5 % étudient l'italien en LV2. Le nombre d'élèves de la classe étudiant l'anglais en LV1 et l'italien en LV2 est :

$$\frac{75}{100} \times \frac{37{,}5}{100} \times 32 = 0{,}75 \times 0{,}375 \times 32 = 9 \text{ élèves}$$

1.2.2 Successions d'augmentations et réductions

Propriété 1.4
augmenter un nombre de x %, puis de y % revient à le multiplier par :

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{y}{100}\right)$$

(à adapter pour les diminutions ou les combinaisons d'augmentation et de diminutions)

Exemple 1.6
Un article coûtait 240 €. Il subit une augmentation de 10 %, puis il est soldé à -40 %. Son prix soldé est :

$$240 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) \times \left(1 - \frac{40}{100}\right) = 240 \times 1{,}10 \times 0{,}60 = 158{,}40 \text{ €}.$$

Exemple 1.7
un article coûtait 80 €, il augmente de 10 %, puis il baisse de 10 %. son nouveau prix n'est pas 80 € mais :

$$80 \times 1{,}10 \times 0{,}90 = 79{,}20 \text{ €}.$$

1.3 Variation d'un pourcentage

Un pourcentage est l'expression d'un quotient de dénominateur 100. Il sert à comparer facilement des rapports de grandeurs. On l'obtient généralement par le calcul d'un rapport $\frac{x}{y}, y \neq 0$. La variation du pourcentage peut donc être liée à une variation de x, ou à une variation de y.

Exemple 1.8
Dans un ménage, le loyer est de 750 € pour des revenus de 3000 €. Le loyer représente donc

$\frac{750}{3000} = 0{,}25 = 25$ % des revenus. Un an plus tard, le loyer représente 30 % des revenus. Cette variation est peut-être dûe à une augmentation du loyer : $\frac{x}{3000} = 0{,}30$ donc $x = 900$ € ; ou encore à une baisse des revenus : $\frac{750}{y} = 0{,}30$ donc $y = \frac{750}{0{,}30} = 2500$ €. On peut même imaginer un mélange des deux !

1.4 Addition et comparaison de pourcentages

1.4.1 Addition de pourcentages

L'addition de deux pourcentages n'a de sens que lorsque ces pourcentages représentent deux parties sans élement commun d'un même ensemble.

Exemple 1.9
Dans une classe, 85 % des élèves ont un ordinateur et parmi eux, 15 % ont une connexion internet bas-débit, et 65 % ont une connexion internet haut-débit. Si on considère comme ensemble de référence, les élèves qui ont un ordinateur, on peut dire que $65\% + 15\% = 80$ % des élèves ayant un ordinateur ont accès à internet.

Exemple 1.10
Au dernier contrôle de maths, 20 % des élèves ont eu plus de 16/20, et 50 % ont eu plus de 12/20. La somme de ces pourcentages n'a aucun sens car l'ensemble des élèves ayant eu plus de 16 est contenu dans l'ensemble des élèves ayant eu plus de 12.

Propriété 1.5
On note A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. L'ensemble $A \cup B$ (on lit A union B) est constitué des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux). L'ensemble $A \cap B$ (on lit A inter B) est constitué des éléments qui appartiennent à A et à B. En notant p_A la proportion de A dans E, ..., on a :

$$p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B}$$

Exemple 1.11
Dans une classe de 25 élèves (population E), 10 élèves ont eu entre 10 et 14 au contrôle de maths (population A), et 12 élèves ont eu entre 12 et 16 (population B). On sait que 15 élèves ont eu entre 10 et 16. Calculer le nombre d'élèves ayant eu entre 12 et 14.
Soit n l'effectif cherché. $A \cup B$ est l'ensemble des élèves ayant eu entre 10 et 16, et $A \cap B$ est l'ensemble des élèves ayant eu entre 12 et 14. On a :

$$p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B}$$

$$\text{soit : } \frac{15}{25} = \frac{10}{25} + \frac{12}{25} - \frac{n}{25}$$

$$\text{d'où : } n = 10 + 12 - 15 = 7$$

1.4.2 Comparaison de pourcentages

Propriété 1.6
Lorsque deux pourcentages portent sur des ensembles distincts, l'ordre des pourcentages, n'est pas obligatoirement le même que celui des données absolues.

Exemple 1.12
Le loyer d'une famille A aux revenus mensuels de 3000 € est de 750 €. Le loyer d'une famille B aux revenus mensuels de 2100 € est de 630 €.

Famille	Loyer en €	loyer en % des revenus
A	750	$\frac{750}{3000} = 25$ %
B	630	$\frac{630}{2100} = 30$ %

En données absolues, c'est la famille A qui paye un loyer plus important, mais en pourcentage des revenus, c'est la famille B qui paye le plus.

1.5 Approximation linéaire

1.5.1 Cas de deux (petites) hausses successives

Exemple 1.13
Un prix P subit deux hausses successives de 3 %. Le nouveau prix P_2 est donné par la formule $P_2 = 1{,}03 \times 1{,}03 \times P = 1{,}060\ 9P$. Le prix P_2 est proche de celui qu'on aurait obtenu en augmentant P de 6 %.
En effet, soit t le taux des deux augmentations successives (en pourcentage). Pour calculer le nouveau prix après l'augmentation totale on multiplie le prix de départ par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^2$, soit par : $1 + \frac{2t}{100} + \frac{t^2}{10\ 000}$. Or $\frac{t^2}{10\ 000}$ est proche de zéro pour t « suffisamment petit », donc pour calculer le nouveau prix on multiplie l'ancien par un nombre très proche de $1 + \frac{2t}{100}$, ce qui correspond à une augmentation de $2t$ %.

1.5.2 Cas général

Soit n un entier naturel « pas trop grand » et t % un « faible » pourcentage. Alors n variations successives de t % correspondent environ à une variation de $(n \times t)$ %.
De même, si t_1 % et t_2 % sont deux « faibles » pourcentages, alors la variation de t_1 % suivie de t_2 % corresepond environ à une variation de $(t_1 + t_2)$ %.

Chapitre 2

Représentations graphiques

2.1 Fonction numérique

Définition 2.1
Si à chaque valeur de x d'un ensemble $\mathscr{D}$ on associe un autre nombre noté $f(x)$ déterminé par une relation algébrique, géométrique, ... on dit qu'on définit une *fonction numérique* f. On dit que f est la fonction définie par $f(x) = \dots$. On note :

$$f : x \longmapsto f(x)$$

– Pour chaque x de $\mathscr{D}$, le nombre $f(x)$ est appelé *image* de x par la fonction f. L'image d'un nombre x est unique.
– Si $y = f(x)$, le nombre x est appelé un *antécédent* de y par la fonction f.

Exemple 2.1
La balance du rayon fruits et légumes du supermarché « Letrègran » est une fonction numérique : elle associe à une masse de tomates (par exemple) un autre nombre qui est le prix à payer. C'est même une fonction *linéaire* que vous avez rencontrée en classe de troisième.

Exemple 2.2
La fonction f est définie sur l'intervalle $[-5\,;\,7]$ par $f(x) = x^2 - 2x - 1$ signifie que si on se donne une valeur de x dans l'intervalle $[-5\,;\,7]$, on peut calculer son image par la fonction f grâce à l'expression donnée :
– on a : $f(-3) = (-3)^2 - 2 \times (-3) - 1 = 9 + 6 - 1 = 14$,
– on peut dire aussi que l'image par f de 0 est -1 (car $f(0) = 0^2 - 2 \times 0 - 1 = -1$),
– on dit aussi 5 est un antécédent de 14 car $f(5) = 5^2 - 2 \times 5 - 1 = 14$.

Remarque 2.1 (Attention !)
Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathscr{D}$:
– pour chaque $x \in \mathscr{D}$, il n'existe qu'une seule image de x par f ;
– par contre un nombre y peut avoir plusieurs antécédents par la fonction f.

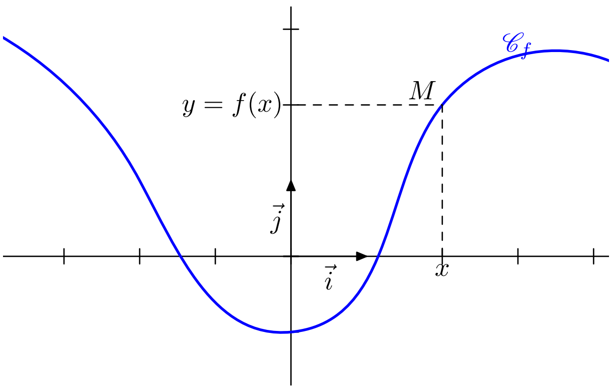
Exemple 2.3
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (x + 1)^2 + 2$.
Pour tout réel x, il existe une seule image de x par f : c'est le nombre qu'on obtient en calculant $(x + 1)^2 + 2$.
Par contre on a :

d'une part $f(2) = (2+1)^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11$;

d'autre part $f(-4) = (-4+1)^2 + 2 = (-3)^2 + 2 = 9 + 2 = 11$

Ainsi 2 et -4 sont deux antécédents de 11.
On peut remarquer aussi que certains nombres n'ont pas d'antécédent. En reprenant la fonction f, le nombre 0 n'a pas d'antécédent.
En effet, $(x+1)^2$ est toujours positif ou nul donc $(x+1)^2 + 2$ est toujours supérieur ou égal à 2 : il ne peut pas valoir 0.

Définition 2.2 (Représentation graphique)
Une fonction f permet d'associer à chaque nombre x d'un ensemble $\mathscr{D}$ un autre nombre noté $f(x)$. En écrivant $y = f(x)$ on obtient un couple $(x; y)$ auquel on peut associer le point $M(x; y)$ dans un repère.
Ainsi, pour tout $x \in \mathscr{D}$ on obtient un point M dans le repère. L'ensemble des points M ainsi obtenus est appelé *courbe représentative de la fonction* f. On la note généralement $\mathscr{C}_f$.

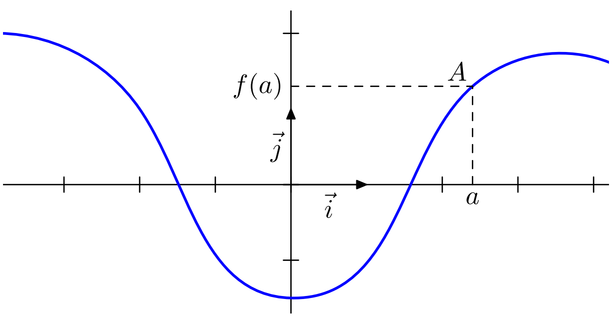


2.2 Lectures graphiques

Dans cette partie, f est une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2.2.1 Image d'un nombre

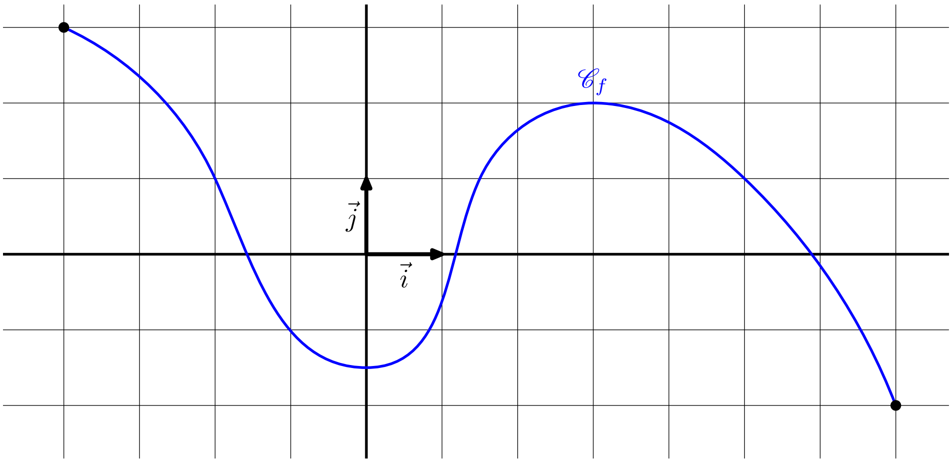
L'image $f(a)$ d'un nombre $a \in \mathscr{D}$ par la fonction f est l'ordonnée du point de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui a pour abscisse a.



2.2.2 Résolution graphique d'équations

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$ c'est trouver les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui ont pour ordonnée m. Cela rvient à rechercher les *antécédents* de m par la fonction f.
Pour déterminer graphiquement les solutions d'une telle équation on cherche les abscisses des points communs entre $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = m$.

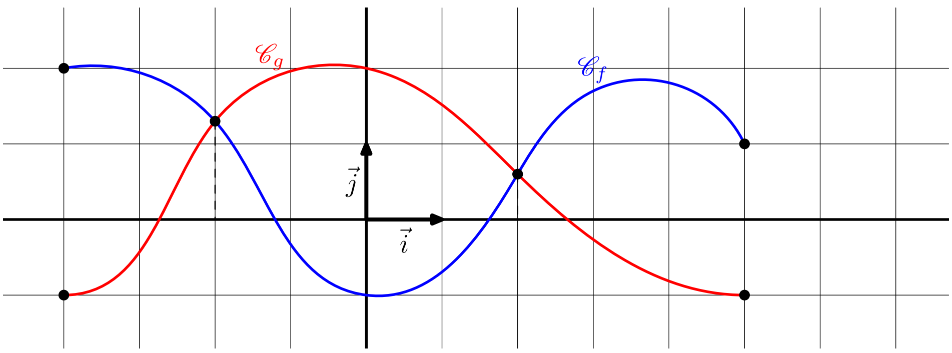
Exemple 2.4
Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;\,7]$.



- L'équation $f(x) = 2{,}5$ a une unique solution sur $[-4\,;\,7]$ car un seul point de $\mathscr{C}_f$ a pour ordonnée 2,5 : il s'agit du point qui a pour abscisse environ $-3{,}3$. On écrit $\mathscr{S} = \{-3{,}3\}$.
- L'équation $f(x) = 1$ a trois solutions car il y a trois points de $\mathscr{C}_f$ qui ont pour ordonnée 1 : les points d'abscisses -2 ; 1,5 et 5. On écrit $\mathscr{S} = \{-2\,;\,1{,}5\,;\,5\}$.
- L'équation $f(x) = -3$ n'a pas de solution car la courbe $\mathscr{C}_f$ n'a pas de point ayant -3 pour ordonnée.
- Les équations $f(x) = 2$ et $f(x) = -1; 5$ ont chacune deux solutions.

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ c'est trouver les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exemple 2.5
Dans le repère ci-dessous, on a tracé les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-4\,;\,5]$.

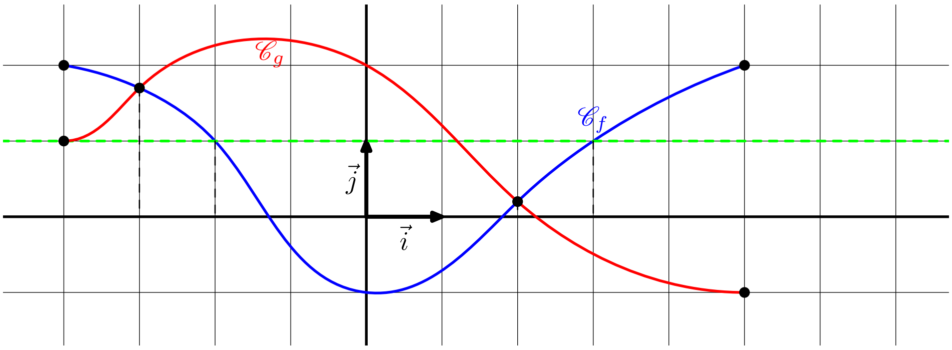


Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$:
$\mathscr{S} = \{-2\,;\,2\}$

2.2.3 Résolution graphique d'inéquations

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$ c'est trouver les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de $\mathscr{C}_g$.

Exemple 2.6
Dans le repère ci-dessous, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-4\,;\,5]$.

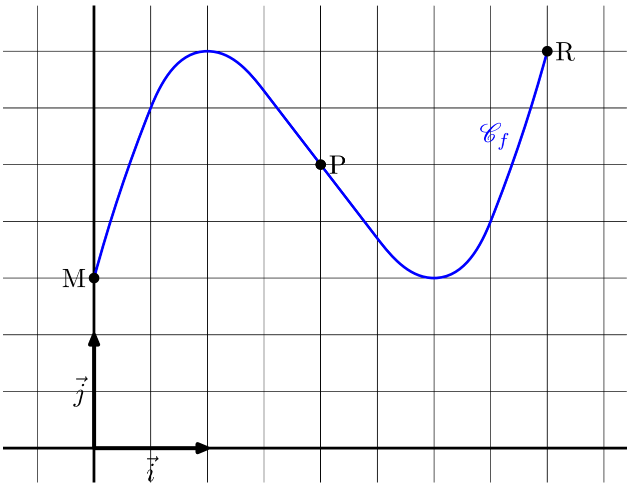


- Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous (ou sur) $\mathscr{C}_g$: $\mathscr{S} = [-3\,;\,2]$.
- Les solutions de l'inéquation $f(x) > 1$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés strictement au dessus de la droite d'équation $y = 1$: $\mathscr{S} = [-4\,;\,-2[\cup]3\,;\,5]$.

2.2.4 Exercice de synthèse

Sur la figure ci-contre, on a tracé la courbe représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,4]$ par $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

1. Tracer la représentation graphique de g.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 2{,}5$.
3. Résoudre l'équation $g(x) = f(x)$.
4. Résoudre l'inéquation $f(x) < g(x)$.
5. Résoudre l'inéquation $g(x) \geq 2$.

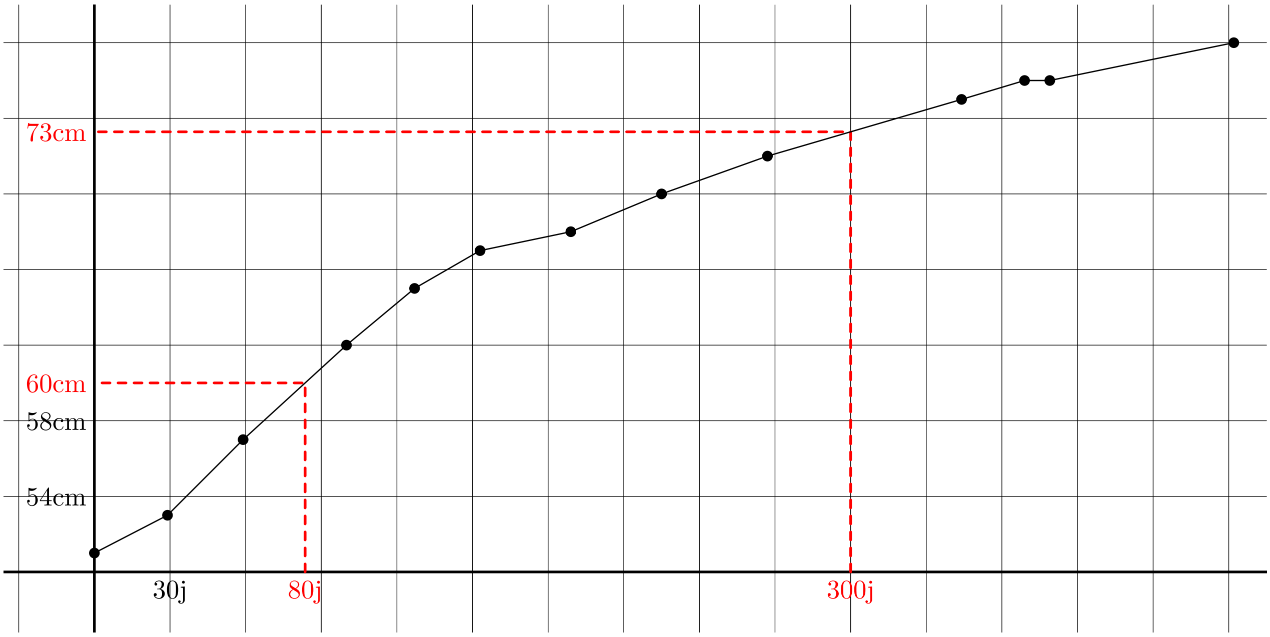


2.3 Interpolation linéaire

Exemple 2.7
On donne dans le tableau suivant l'âge (en jours) d'un enfant né le 24 janvier 2006 et sa taille correspondante :

âge (jours)	0	29	59	100	127	153	189	225	267	344	369	379	452
taille (cm)	51	53	57	62	65	67	68	70	72	75	76	76	78

On aimerait savoir à quelle date approximative cet enfant mesurait 60 cm.
On place les points correspondants à chaque colonne du tableau dans un repère, puis on joint les points par des segments : on obtient une courbe appelée *ligne brisée*.



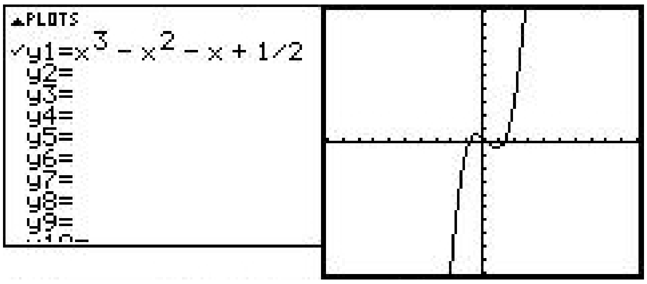
On lit l'abscisse x du point de la ligne brisée qui a pour ordonnée 60 cm : $x \approx 80$ jours. La date où il mesurait 60 cm est donc le 15 avril 2006.
On aimerait maintenant connaître sa taille le 20 novembre 2006 soit 300 jours après sa naissance. On lit l'ordonnée du point de la ligne brisée qui a pour abscisse 300 jours : la taille est d'environ 73 cm.

Dans l'exemple précédent, on peut appeler $f(x)$ la taille du bébé en fonction de son âge x exprimé en jours. Le tableau de valeurs ne nous donnait que quelques valeurs de $f(x)$; les autres nous sont inconnues. Ces valeurs nous permettent de placer des points dans un repère. En traçant la courbe constituée des segments joignant deux points consécutifs on obtient une *ligne brisée* appelée *courbe d'interpolation linéaire* de la fonction f. On peut alors lire graphiquement une valeur approchée de la taille estimée du bébé pour n'importe quel âge.

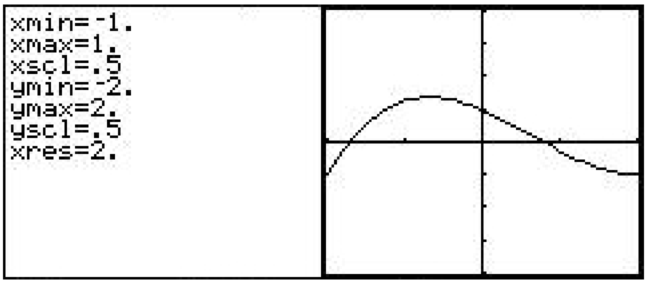
2.4 Recherche « expérimentale » d'extremums

Dans cette partie nous allons utiliser la calculatrice graphique afin de déterminer une valeur approchée des extremums d'une fonction.

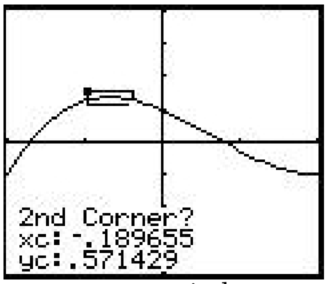
Exemple 2.8
On considère la fonction f définie sur $[-1\,;\,1]$ par $f(x) = x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2}$. Nous allons déterminer une valeur approchée du maximum de f sur cet intervalle et une valeur approchée de la valeur de x pour laquelle ce maximum est atteint.
Traçons la représentation graphique de cette fonction à l'aide de la calculatrice : Pour les « casio », on sélectionne le menu `GRAPH` et pour les « TI », on appuie sur la touche `Y=`.
Sur la ligne `Y1=`, on complète par `X^3-X^2-X+1/2`. (On obtient `X` en appuyant sur la touche $\boxed{X, \Theta, T}$.)
Appuyer ensuite sur `EXE` pour les casio ou `GRAPH` pour les TI.
On obtient alors un repère sur l'écran où une courbe est éventuellement tracée. Si la courbe n'apparait pas, c'est sans doute que les unités graphiques sont mal choisies.



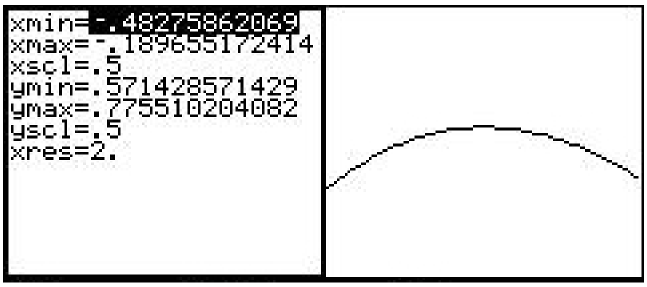
Appuyer alors sur la touche `V-Window` ou `Window` un écran affiche alors les valeurs minimales et maximales de `X` et `Y`. Compléter avec les valeurs ci-après :
`Xmin : -1`, `Xmax : 1`, `scale : .5`, `Ymin : -2`, `Ymax : 2`, `scale : .5`.
Ces valeurs définissent les bornes inférieures et supérieures en abscisses et en ordonnées de la fenêtre à afficher.



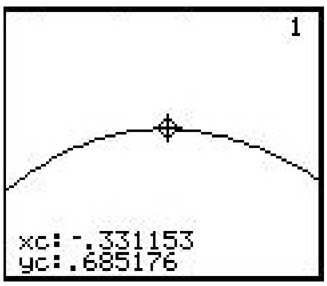
Appuyer maintenant sur la touche `Zoom` et sélectionner `Box` ; déplacer le curseur légèrement au dessus et à gauche du point de la courbe qui vous semble le plus haut et appuyer sur `EXE` ; déplacer à nouveau le curseur pour que le point le plus haut soit dans le rectangle clignotant et appuyer à nouveau sur `EXE`.



La courbe se trace à nouveau dans une nouvelle fenêtre dont on peut voir les caractéristiques (Xmin, Xmax, ...) en appuyant sur `Window`.



Revenir au graphique et appuyer sur la touche `Trace` ; déplacer le curseur sur la courbe. Chercher la position du curseur pour laquelle la valeur de `Y` est maximale : c'est la valeur approchée du maximum de f et la valeur de x pour laquelle ce maximum est atteint est également affichée sur l'écran.



On obtient $x \approx -0{,}33$ et $y_{max} \approx 0{,}685$.

Exemple 2.9
Utiliser cette méthode pour déterminer une valeur approchée de la solution de $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, où f est la fonction définie dans l'exemple précédent.

2.5 Courbes de niveau

2.5.1 Repérage dans l'espace

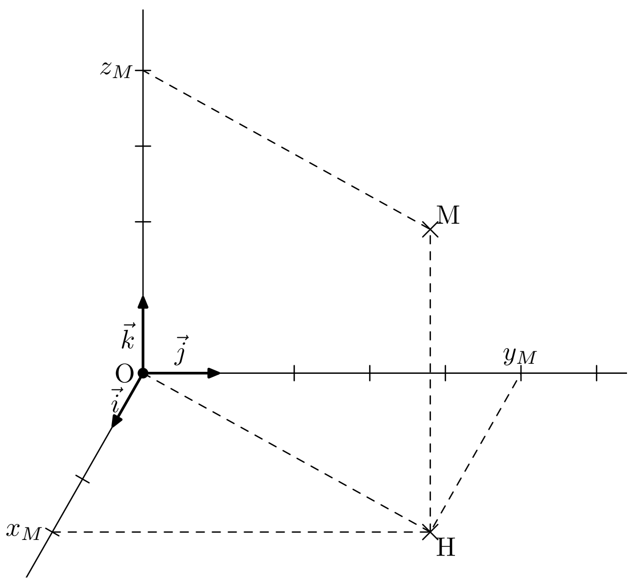
Dans le plan muni d'un repère, on peut repérer un point grâce à deux nombres : son abscisse et son ordonnée. On note $A(x_A; y_A)$. Nous allons ici repérer des points dans *l'espace* : chaque point aura une troisième coordonnée appelée *cote*.

Définition 2.3
Si O, I, J sont trois points non alignés et K un point qui n'est pas dans le plan (OIJ), on dit que $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ est un repère de l'espace.

Remarque 2.2 (Vocabulaire)
- Si les droites (OI), (OJ) et (OK) sont deux à deux perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal.
- Si de plus on a $OI = OJ = OK = 1$, on dit que le repère est orthonormal.
- En posant : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$, on peut aussi noter le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition 2.4
Soit M un point de l'espace. On trace la parallèle à la droite (OK) passant par M ; elle coupe le plan de base (OIJ) en un point H.

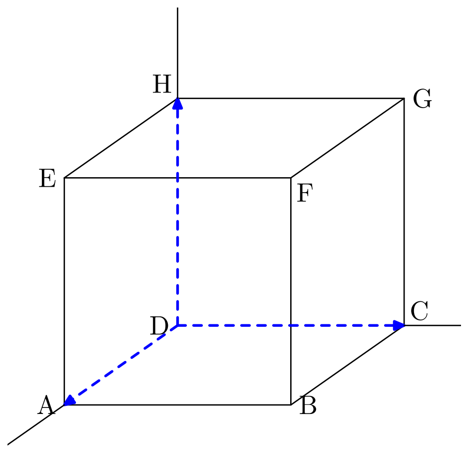
L'abscisse et l'ordonnée de M dans l'espace sont alors l'abscisse et l'ordonnée de H dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan (OIJ). La cote de M est la distance HM affectée du signe qui convient, en ayant pris comme unité la norme du vecteur $\vec{k}$: $||\vec{k}||$.



On a ici $x_M = 3$, $y_M = 5$ et $z_M = 4$. On note $M(3; 5; 4)$.

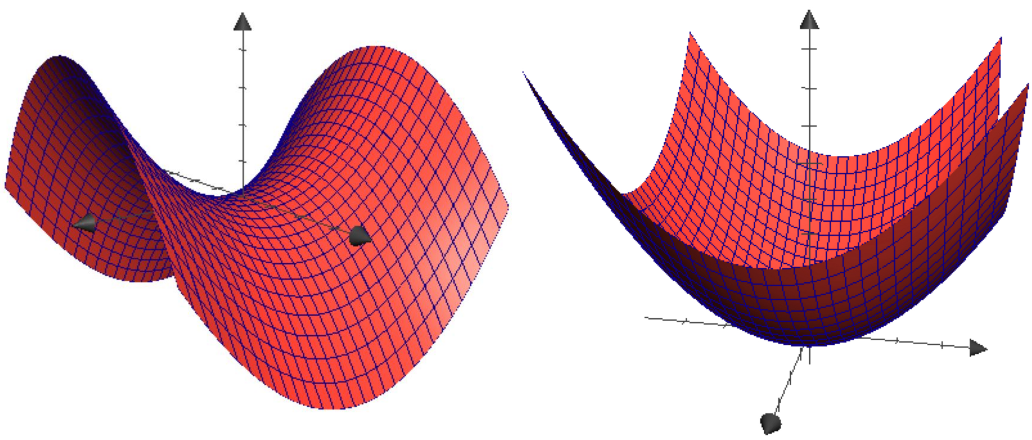
Exemple 2.10
Sur la figure ci-contre, on a tracé un cube $ABCDEFGH$. On considère le repère $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

1. Déterminer les coordonnées des points suivants :
   G, E, B, I milieu de $[CB]$, J milieu de $[FH]$.
2. Déterminer les points dont les coordonnées sont :
   $(1; 1; 1)$, $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.



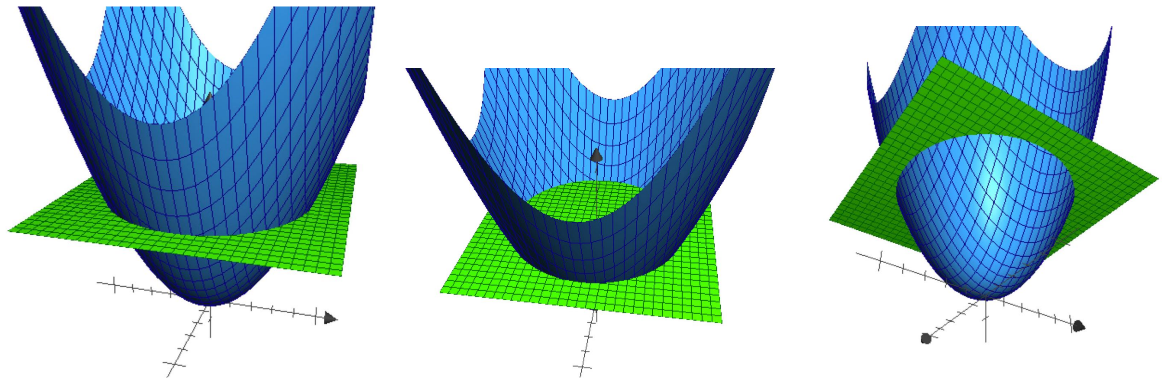
2.5.2 Surface de l'espace

Dans le plan ramené à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient une équation du type $y = f(x)$ où f est une fonction numérique est une courbe.
Dans l'espace l'ensemble des points dont les trois coordonnées vérifient une relation algébrique entre elles est une surface. On a tracé par exemple ci-dessous les surfaces constituées des points de l'espace dont les coordonnées vérifient $z = x^2 - y^2$ ou $z = x^2 + y^2$:



2.5.3 Courbe de niveau d'une surface

Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où le vecteur $\vec{k}$ a une direction verticale, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $z = c$ (où c est un réel quelconque) est un plan horizontal. On dit que $z = c$ est une équation de ce plan.
Soit $\mathscr{S}$ une surface et $\mathscr{P}$ le plan d'équation $z = c$. L'intersection entre la surface $\mathscr{S}$ et le plan $\mathscr{P}$ est appelée *courbe de niveau* c de la surface $\mathscr{S}$.



Trois vues de la courbe de niveau 5 du paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$.

Chapitre 3

Statistiques

L'objet du chapitre est de donner des outils permettant d'exploiter de façon pertinente une série de données recueillies préalablement. L'utilisation des statistiques est présente dans beaucoup de domaines[1] ; elles servent notamment à constater, comparer ou prévoir certaines situations.

3.1 Graphiques et paramètres de position

3.1.1 Vocabulaire

Définition 3.1
On considère une série statistique qui regroupe les résultats obtenus lors d'une étude (sondage, résultats sportifs, médicaux, ...)
- la *population* est l'ensemble des individus étudiés ; il peut s'agir de personnes d'animaux, d'objets, ... ;
- un *caractère* est une des caractéristiques étudiées chez les individus de la population : taille, couleur des cheveux, note à un devoir, ... ;
- une *classe* ou *catégorie* est un groupe de la population ayant un même caractère ;
- l'*effectif* d'une classe (ou « catégorie ») est le nombre d'éléments de la classe.
- la *fréquence* d'une classe est le quotient de l'effectif de la classe par l'effectif total :

$$f_i = \text{fréquence de } x_i = \frac{\text{effectif de } x_i}{\text{effectif total}} = \frac{n_i}{N}$$

Exemple 3.1
On donne ci-dessous le tableau récapitulatif des niveaux de pollutions atteints au cours d'une année dans une grande ville. Calculer les fréquences :

Niveau de pollution	0	1	2	3	4
Nombre de jours	5	81	143	100	36
fréquence					

Remarque 3.1
La somme des fréquences vaut 1.

[1]Même et surtout non-mathématiques

3.1.2 Graphiques

Histogramme

Si on représente une série statistique par un histogramme, chaque classe correspond à un rectangle dont l'*aire* est proportionnelle à l'effectif de la classe, et la largeur est proportionnelle à l'amplitude de la classe. On l'utilise pour représenter une série dont le caractère est quantitatif.

Exemple 3.2
Le tableau suivant donne l'effectif des entreprises d'une zone industrielle suivant le nombre d'employés :

Nombre d'employés N	$N < 10$	$10 \leq N < 25$	$25 \leq N < 50$	$50 \leq N < 100$
Nombre d'entreprises	5	10	8	3

La représentation de ce tableau en histogramme donne :

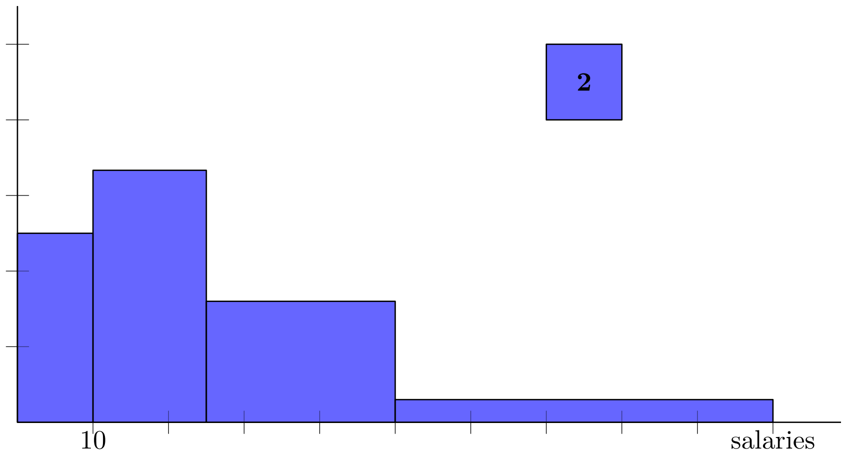
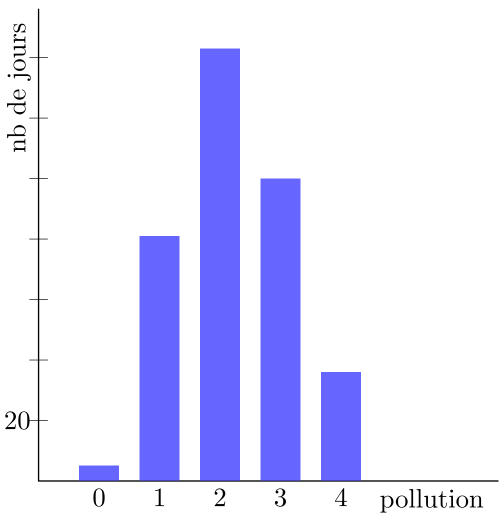
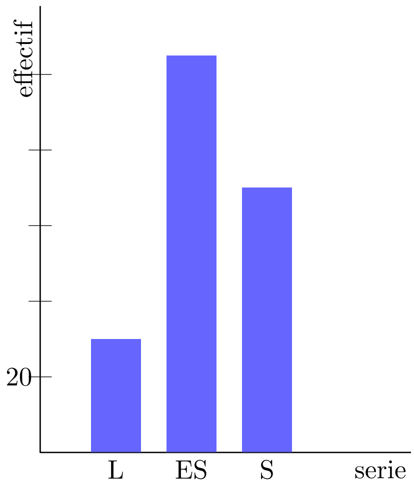


Diagramme en bâtons

Dans un diagramme en bâtons, la hauteur de chaque bâton est proportionnelle à l'effectif de la classe. On l'utilise pour représenter une série dont le caractère est qualitatif.

Exemple 3.3
Les deux diagrammes suivants sont des exemples de diagrammes en bâtons ; le premier représente les données de l'exemple 3.1, le second représente le nombre d'élèves de première dans chacune des séries générales d'un lycée :





3.1.3 Paramètres statistiques

Définition 3.2
Le *mode* ou *valeur modale* est la valeur de la variable statistique qui est le plus souvent observée. C'est à dire la valeur du caractère ou la classe qui a le plus grand effectif.

Exemple 3.4
Dans l'exemple 3.1, le mode est le niveau de pollution 2.
Dans l'exemple 3.3 (le deuxième diagramme), le mode est le bac ES.

Définition 3.3
La *médiane* d'une série statistique est la valeur de la variable qui partage la population en deux groupes de même effectif :
– ceux qui ont une valeur du caractère inférieure à la médiane,
– ceux qui ont une valeur du caractère supérieure à la médiane,

Remarque 3.2
Deux cas sont possibles :
– s'il y a un nombre impair d'observations : $N = 2k + 1$, où $k \in \mathbf{N}$, alors la médiane est la $k + 1^{\text{e}}$ valeur du caractère (les valeurs étant rangées par ordre croissant).
– s'il y a un nombre pair d'observations : $N = 2k$, où $k \in \mathbf{N}$, alors on convient de prendre comme médiane la moyenne des k^{e} et $k + 1^{\text{e}}$ valeurs du caractère (les valeurs étant rangées par ordre croissant).

Exemple 3.5 (nombre impair d'observations)
On donne la série statistique suivante :

valeur	3	4	6	7
effectif	1	3	2	1

On a ici un effectif total de 7. La médiane est donc la 4^{e} valeur lorsqu'elles sont rangées par ordre croissant :
3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 6 ; 6 ; 7. La médiane vaut 4.

Exemple 3.6 (nombre pair d'observations)
On donne la série statistique suivante :

valeur	3	4	6	7
effectif	2	3	1	4

On a ici un effectif total de 10. La médiane est donc la moyenne de la 5^{e} et de la 6^{e} valeurs lorsqu'elles sont rangées par ordre croissant :
3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 6 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7. La médiane vaut $\frac{4+6}{2} = 5$.

Définition 3.4
La *moyenne* d'une série statistique est le quotient de la somme de toutes les valeurs de la série (comptées autant de fois que leur effectif) par l'effectif total. En considérant une série statistique de N observations où la variable x prend p valeurs notées x_1, x_2, …, x_p, chacune

ayant un effectif noté n_i, on a :

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{N}, \text{ où } \sum_{i=1}^{p} n_i x_i = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_p x_p$$

Exemple 3.7
En reprenant les données de l'exemple 3.1, on peut calculer le niveau de pollution moyen de la ville étudiée :

$$\overline{x} = \frac{5 \times 0 + 81 \times 1 + 143 \times 2 + 100 \times 3 + 4 \times 36}{365} \approx 2{,}2$$

Remarque 3.3
Le mode, la médiane et la moyenne sont des paramètres dits de *position* : il permettent de situer un individu par rapport à ce paramètre. On appartient au groupe le plus représentatif ; on obtient une note supérieure ou inférieure à la moyenne de classe ; on est dans la première moitié ou dans la deuxième moitié de la classe.

Les paramètres de positions sont souvent insuffisants pour étudier correctement une série statistique : deux séries ayant les mêmes paramètres peuvent être très différentes.

Exemple 3.8
On donne les résultats de deux groupes d'élèves à un même contrôle :

Groupe 1 :

note x	3	5	6	7	8	9	10	13	14	18	20
effectif	1	1	2	2	4	2	1	2	3	1	1

Groupe 2 :

note y	1	2	3	4	13	14	18	19	20
effectif	3	2	2	4	1	2	4	2	2

Ces deux séries ont pour moyenne $\overline{x} = \overline{y} = 10$ et pour médiane $\text{Med}_x = \text{Med}_y = 8{,}5$. Elles sont pourtant très différentes : dans le groupe 1 les résultats sont très « dispersés » alors que dans le groupe 2 on a beaucoup d'élèves en difficulté et beaucoup de bons élèves.

3.2 Diagrammes en boîtes

3.2.1 Quartiles. Déciles

On a vu dans la définition 3.3 que la médiane permet de diviser une population en deux groupes de même effectif. On peut se poser la même question pour séparer la population en quatre groupes d'effectifs comparables :

Définition 3.5
Le *premier quartile* d'une série statistique, noté Q_1, est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins un quart des valeurs soit inférieur ou égal à Q_1.
De même, le *troisième quartile* d'une série statistique, noté Q_3, est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins trois quarts des valeurs soient inférieur ou égal à Q_3.

Exemple 3.9
On donne la série suivante :

Valeur x_i	3	5	6	7	10	12	15	20
Effectif n_i	2	2	4	3	3	7	5	3

Cette série comporte 29 valeurs.
On a $\frac{1}{4} \times 29 = 7{,}25$. Le premier quartile Q_1 est donc la 8^{e} valeur de la série lorsque celles-ci sont rangées par ordre croissant : $Q_1 = 6$.
On a $frac34 \times 29 = 21{,}75$. Le troisième quartile Q_3 est donc la 22^{e} valeur de la série lorsque celles-ci sont rangées par ordre croissant : $Q_3 = 15$.

Remarque 3.4
La différence $Q_3 - Q_1$ est appelée *écart interquartile* et l'intervalle $[Q_1\,;\,Q_3]$ est appelé *intervalle interquartile* : il contient au moins 50% des valeurs de la série.

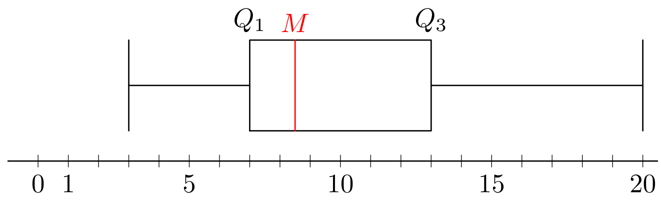
De la même manière, on peut diviser la population étudiée en dix groupes d'effectifs comparables grâce aux déciles. En fait on utilise surtout les premier et neuvième déciles :

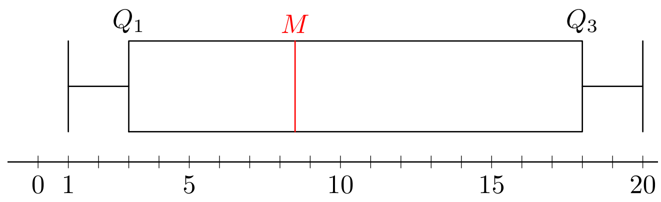
Définition 3.6
Le *premier décile*, noté D_1 est la plus petite valeur du caractère telle qu'au moins un dixième des valeurs soit inférieur ou égale à D_1.
Et le *neuvième décile*, noté D_9 est la plus petite valeur du caractère telle qu'au moins neuf dixièmes des valeurs soient inférieur ou égale à D_9.

3.2.2 Boîtes à moustaches

La représentation graphique de la dispersion d'une série statistique se fait à l'aide de graphiques appelés *diagrammes en boites*, *boites à moustaches*, ou *box plot*, voire *diagramme de Tuckey*.
On les trace comme ceci :
– On construit en face d'un axe gradué, permettant de repérer les valeurs extrêmes de la série étudiée, un rectangle dont la longueur est égale à l'écart interquartile et dans lequel on représente la médiane par un trait.
– Deux traits repèrent les valeurs extrêmes de la série.

Exemple 3.10
On reprend les deux séries de l'exemple 3.8 :
Pour le groupe 1, l'effectif total est $N_1 = 20$ et $\frac{1}{4} \times 20 = 5$, donc Q_1 est la cinquième valeur de la série : $Q_1 = 7$; de même, $\frac{3}{4} \times 20 = 15$ donc Q_3 est la quinzième valeur de la série : $Q_3 = 13$.
Pour le groupe 2, l'effectif total est $N_2 = 22$ et $\frac{1}{4} \times 22 = 5{,}5$, donc Q_1 est la sixième valeur de la série : $Q_1 = 3$; de même, $\frac{3}{4} \times 22 = 16{,}5$ donc Q_3 est la dix-septième valeur de la série : $Q_3 = 18$.
Voici les deux boîtes à moustaches :





Remarque 3.5
Parfois, les moustaches représentent les premier et neuvième déciles. Les valeurs inférieures à D_1 ou supérieures à D_9 sont représentées par des points (on se contente parfois des valeurs extrêmes).

3.3 Moyenne et écart-type

3.3.1 Moyenne

3.3.2 Variance. Écart-type

3.4 Normalité

3.5 Le logiciel R

Chapitre 4

Suites numériques

4.1 Généralités

4.1.1 Définitions

4.1.2 Calculatrices

4.2 Suites arithmétiques

4.3 Suites géométriques

4.4 Exemple de suite quelconque

Chapitre 5

Dénombrement

5.1 Diagrammes

Venn et Carroll

5.2 Arbres de choix

5.3 Tableaux

5.3.1 À double entrée

5.3.2 Tableaux croisés