Cours de mathématiques

Thomas Rey

Classe de seconde
le 29 août 2010

« *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.* »
EUCLIDE D'ALEXANDRIE

Table des matières

« *Les hommes sont comme les chiffres, ils n'acquièrent de valeur que par leur position* »
NAPOLÉON I$^{\text{ER}}$

Chapitre 1

Fonctions numériques

1.1 Notion de fonction

Exemple 1.1 (le banquier)
Un banquier propose un livret d'épargne qui rapporte 3% d'intérêts par an. À la fin de l'année chaque titulaire d'un tel livret reçoit en plus des intérêts la somme de 10 €.

1. Calculer la somme disponible après un an si on place 100 € en début d'année.
2. Même question pour un placement de 250 €.
3. Le banquier a 150 clients possèdant un tel livret. S'il note x le montant placé en début d'année par un client, exprimer le montant $\mathrm{S}(x)$ disponible après un an.

Réponses :

1. La somme disponible après un an est :

$$\mathrm{S} = 100 + \frac{3}{100} \times 100 + 10 = 113€$$

2. La somme disponible après un an est :

$$\mathrm{S} = 250 + \frac{3}{100} \times 250 + 10 = 267{,}50€$$

3. La somme disponible est :

$$\mathrm{S}(x) = x + \frac{3}{100} \times x + 10 = 1{,}03x + 10$$

La somme disponible après un an $\mathrm{S}(x)$ dépend de la valeur de x on dit que S est une *fonction* de x.

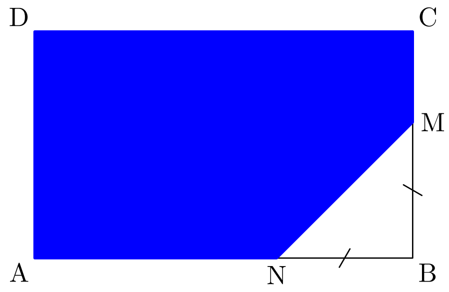
Remarque 1.1
Dans un tableur, le banquier peut compléter une feuille de calculs comme ceci :

B3 f(x) Σ = =A3*1,03+10

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	Montant placé	Montant après un an						
3	100,00	113,00						
4	250,00	267,50						
5	500,00	525,00						
6	218,00	234,54						
7	23,00	33,69						
8	36 000,00	37 090,00						
9	230,50	247,42						

Dans la cellule `B3` on a écrit `A3+0,03*A3+10` ; puis on a recopié cette formule vers le bas.

Exemple 1.2 (géométrie)
On a tracé ci-dessous un rectangle ABCD tel que AD = 3 cm et AB = 5 cm. M est un point du segment [BC]. N est le point de [BA] tel que BN = BM.



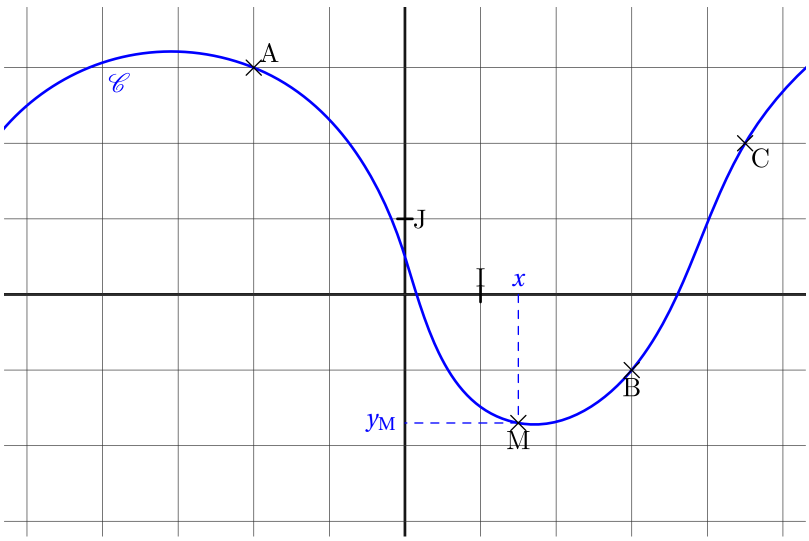
1. Calculer l'aire délimitée par le pentagone ANMCD lorsque BM = 1 cm.
2. Même question lorsque BM = 2 cm.
3. On pose maintenant BM = x. Exprimer l'aire $\mathscr{A}(x)$ de ANMCD en fonction de x.

Réponses :

1. L'aire de ANMCD est égale à l'aire de ABCD moins l'aire de BMN. Donc :
$$\mathscr{A} = 5\times 3 - \frac{1\times 1}{2} = 14{,}5 \text{ cm}^2$$
2. De même :
$$\mathscr{A}' = 5\times 3 - \frac{2\times 2}{2} = 13 \text{ cm}^2$$
3. Si BM = x, l'aire de BNM vaut $\frac{x\times x}{2}$. Donc :
$$\mathscr{A}(x) = 5\times 3 - \frac{x\times x}{2} = 15 - \frac{1}{2}x^2$$

L'aire $\mathscr{A}(x)$ dépend de la valeur de x on dit que $\mathscr{A}$ est une *fonction* de x.

Exemple 1.3
Sur la figure ci-dessous, on a tracé une courbe dans un repère.



On note A, B et C les points de la courbe d'abscisses respectives −2, 3 et $\frac{9}{2}$.
Lire l'ordonnée de chacun des points A, B et C.
On a : $y_A = 3$, $y_B = -1$ et $y_C = 2$.
De même, pour tout point M d'abscisse x de la courbe, on peut lire son ordonnée y_M. L'ordonnée de M dépend de x. On dit que c'est une *fonction* de x.

1.2 Généralisation : notion de fonction

1.2.1 Définition

Définition 1.1
Si à chaque valeur de x d'un ensemble D on associe un autre nombre noté $f(x)$ déterminé par une relation algébrique, géométrique, ... on dit qu'on définit une *fonction numérique* f. On dit que f est la fonction définie par $f(x) = \ldots$. On note :

$$f : x \longmapsto f(x)$$

Quelques points de vocabulaire :
- pour chaque x de D, le nombre $f(x)$ est appelé *image* de x par la fonction f. L'image d'un nombre x est unique ;
- le nombre x est appelé un *antécédent* de $f(x)$ par la fonction f.

1.2.2 Exemples

Exemple 1.4
La fonction f est définie pour tous les x compris entre -5 et 7 par $f(x) = x^2 - 2x - 1$. Cela signifie que si on se donne une valeur de x comprise entre -5 et 7, on peut calculer son image par la fonction f grâce à l'expression donnée :
- on a : $f(-3) = (-3)^2 - 2 \times (-3) - 1 = 9 + 6 - 1 = 14$;
- on peut dire aussi que l'image par f de 0 est -1 (car $f(0) = 0^2 - 2 \times 0 - 1 = -1$) ;
- on dit aussi 5 est un antécédent de 14 car $f(5) = 5^2 - 2 \times 5 - 1 = 14$.

Remarque 1.2 (Attention !)
Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathscr{D}$:
- pour chaque $x \in \mathscr{D}$, il n'existe qu'une seule image de x par f ;
- par contre un nombre y peut avoir plusieurs antécédents par la fonction f.

Exemple 1.5
Soit f la fonction définie pour tous les nombres x par $f(x) = (x+1)^2 + 2$.
Pour tout nombre x, il existe une seule image de x par f : c'est le nombre qu'on obtient en calculant $(x+1)^2 + 2$.
Par contre on a :

d'une part $f(2) = (2+1)^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11$;

d'autre part $f(-4) = (-4+1)^2 + 2 = (-3)^2 + 2 = 9 + 2 = 11$

Ainsi 2 et -4 sont deux antécédents de 11.
On peut remarquer aussi que certains nombres n'ont pas d'antécédent. En reprenant la fonction f, le nombre 0 n'a pas d'antécédent.
En effet, $(x+1)^2$ est toujours positif ou nul donc $(x+1)^2 + 2$ est toujours supérieur ou égal à 2 : il ne peut pas valoir 0.

1.2.3 Algorithmes

Exemple 1.6
On souhaite écrire un algorithme décrivant la façon de calculer l'image d'un nombre par la fonction $f : x \mapsto 2x - 7$.

```
Entrées :
Saisir x;
début
    Calculer le double de x;
    Retirer 7;
    Afficher le résultat;
fin
```

Algorithme 1 : Calcul d'une image

Exemple 1.7
On souhaite déterminer si un nombre x est un antécédent d'un nombre y par la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 5$.

```
Entrées :
Demander le nombre x;
Demander le nombre y;
début
    Calculer le carré de x;
    Multiplier par 2;
    Retirer 5;
    Nommer z ce dernier résultat;
    si y = z alors
        Afficher « Oui x est un antécédent de y » ;
    sinon
        Afficher « Non x n'est pas un antécédent de y » ;
fin
```

Algorithme 2 : x est un antécédent de y ?

1.3 Ensemble de définition. Valeurs interdites

On a vu dans l'exemple 1.4 que la fonction f était définie pour tous les x compris entre -5 et 7. Cette expression « tous les x compris entre -5 et 7 » est longue à écrire, aussi, les mathématiciens ont inventé une notation permettant de simplifier son écriture : tous les x compris entre -5 et 7 s'écrit $[-5; 7]$ on parle de l'*intervalle fermé* de bornes -5 et 7 ou plus simplement de l'intervalle fermé $-5, 7$.
De même, l'ensemble de tous les nombres compris entre 0 et 1 s'écrit $[0; 1]$.
Attention : 0 et 1 appartiennent à l'intervalle $[0; 1]$; si on souhaite écrire l'ensemble de tous les nombres strictement positifs et strictement inférieurs à 1, on écrit $]0; 1[$ (crochets vers l'extérieur). On dit que cet intervalle est *ouvert*.
On peut aussi définir des intervalles *semi-ouverts* (ou semi-fermés) comme par exemple $[0; 1[$ qui contient tous les nombres positifs ou nuls strictement inférieurs à 1.
Le plus grand ensemble de nombres que nous utiliserons en classe de seconde est appelé *ensemble des réels* ; on le note $\mathbf{R}$. Cet ensemble peut être partagé :
- on note $\mathbf{R}_+$ l'ensemble de tous les réels *positifs* (ou nuls) ;
- on note $\mathbf{R}_-$ l'ensemble de tous les réels *négatifs* (ou nuls) ;

– on note $\mathbf{R}^*$ l'ensemble de tous les réels non nuls (tous les réels sauf 0) ;
– on note $\mathbf{R}_+^*$ l'ensemble de tous les réels strictement *positifs* ;
– on note $\mathbf{R}_-^*$ l'ensemble de tous les réels strictement *négatifs*.

Enfin, en utilisant le symbole « ∞ » qui signifie *infini*[1], on peut donc écrire :

$$\mathbf{R}_+ = [0\,;+\infty[;\qquad \mathbf{R}_- =]-\infty\,;0];\qquad \mathbf{R}_+^* =]0\,;+\infty[;\qquad \mathbf{R}_-^* =]-\infty\,;0[;$$

Définition 1.2
Soit f une fonction numérique. L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on peut calculer $f(x)$ est appelé *ensemble de définition* de la fonction f. On le note généralement $\mathscr{D}_f$.

Les valeurs pour lesquelles on ne peut pas calculer $f(x)$ sont appelées *valeurs interdites* de la fonction f.

Exemple 1.8 (à retenir !)

– Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$. On ne peut calculer $f(x)$ si $x-3=0$: la division par 0 n'existe pas. Ainsi $x=3$ est une valeur interdite et l'ensemble de définition de la fonction f est : $\mathscr{D}_f =]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[= \mathbf{R}\setminus\{3\}$.
– Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x+2}$. On ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre strictement négatif. Donc pour pouvoir calculer $g(x)$ il faut que $x+2 \geq 0$, c'est à dire que $x \geq -2$. Donc l'ensemble de définition de g est $\mathscr{D}_g = [-2\,;+\infty[$.
– Soit h la fonction définie par $h(x) = 2x^2-3x+1$. Quelque soit la valeur de x on peut calculer $2x^2-3x+1$. Donc l'ensemble de définition de h est $\mathscr{D}_h = \mathbf{R}$.

Remarque 1.3
Parfois, l'énoncé restreint l'ensemble de définition d'une fonction. Dans l'exemple 1.4, la fonction f n'était définie, d'après l'énoncé, que sur $[-5\,;7]$: c'est son ensemble de définition. Pourtant sans cette précision dans l'énoncé, on aurait pu calculer $f(x)$ pour n'importe quelle valeur réelle de x.

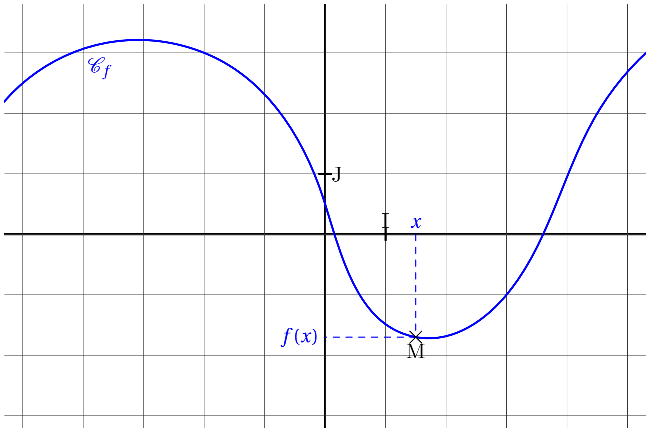
1.4 Représentation graphique

Dans cette partie, nous utiliserons un repère orthogonal du plan. Vous en avez déjà entendu parler depuis la cinquième[2], nous reviendrons un peu plus en détail sur le repérage au cours du chapitre 2.

On a vu dans l'exemple 1.3 qu'on peut définir une fonction à partir d'un graphique : à chaque abscisse x, on associe le nombre $f(x)$ qui est l'ordonnée du point d'abscisse x de la courbe.

Réciproquement, si on a une fonction f définie sur $\mathscr{D}_f$, à chaque nombre $x \in \mathscr{D}_f$ on associe un deuxième nombre $f(x)$. Ainsi, chaque couple $(x; f(x))$ forme les coordonnées d'un point M dans un repère. L'ensemble de tous les points M lorsque x varie dans $\mathscr{D}_f$ est appelé *représentation graphique* de la fonction f dans le repère. On la note généralement $\mathscr{C}_f$.

1. Ce symbole a été inventé par WALLIS mathématicien anglais du XVII$^{\text{e}}$ siècle.
2. Du moins, je l'espère !


$\mathscr{C}_f$
J
I
x
$f(x)$
M

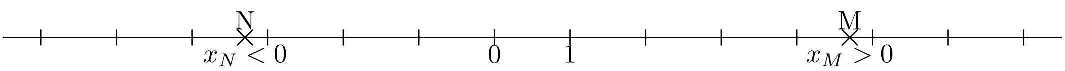
Chapitre 2

Repérage du plan

2.1 Repère du plan

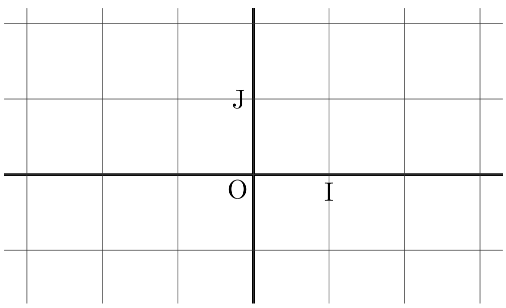
Définition 2.1
Soit O et I deux points distincts du plan. On peut graduer la droite (OI) en prenant la distance OI comme unité. On obtient alors un *axe gradué*. Chaque point M de cet axe est alors repéré par un unique nombre : son *abscisse* notée x_{M} definie comme ceci :

- si M est du même côté de O que I, alors $x_{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OI}}$;
- si M est de l'autre côté de O que I, alors $x_{\mathrm{M}} = -\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OI}}$.



Définition 2.2
Un repère du plan est constitué de trois points non alignés O, I et J. Le point O est appelé *origine* du repère et les droites (OI) et (OJ) les *axes* du repère. On le note (O; I, J).

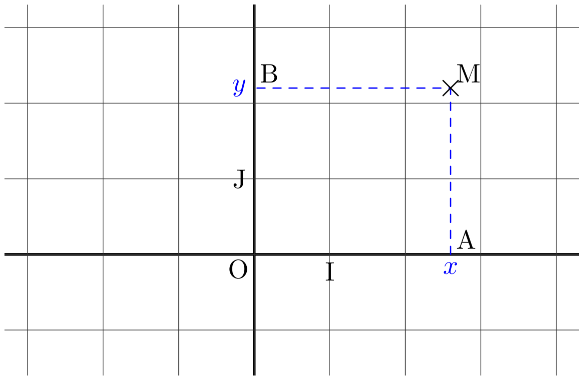
Remarque 2.1
Lorsque le triangle OIJ est rectangle en O, on dit que le repère est *orthogonal*; si de plus il est isocèle avec OI = OJ = 1, on dit que le repère est *orthonormé*. On n'utilisera cette année que des repères orthogonaux et orthonormés.



Repère orthonormé

Définition 2.3
On considère un repère orthonormé du plan (O; I, J). Pour chaque point M du plan on appelle *abscisse* et *ordonnée* du point M le couple de nombres noté $(x; y)$ tel que :

- si OAM est rectangle en A avec A ∈ (OI), alors x est l'abscisse de A sur l'axe gradué (O, I) ;
- si OBM est rectangle en B avec B ∈ (OJ), alors y est l'abscisse de B sur l'axe gradué (O, J).



2.2 Milieu

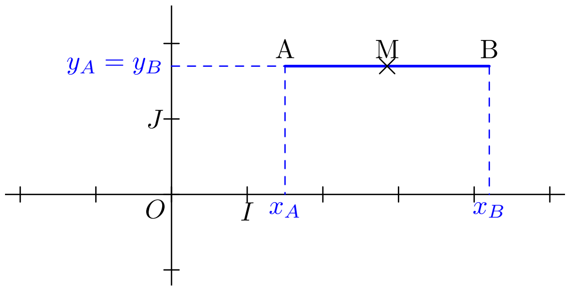
Propriété 2.1
Soit (O; I, J) un repère du plan et A, B deux points du plan de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$. Alors le point M milieu de [AB] a pour coordonnées :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Démonstration :
On se place dans un repère orthonormé du plan.

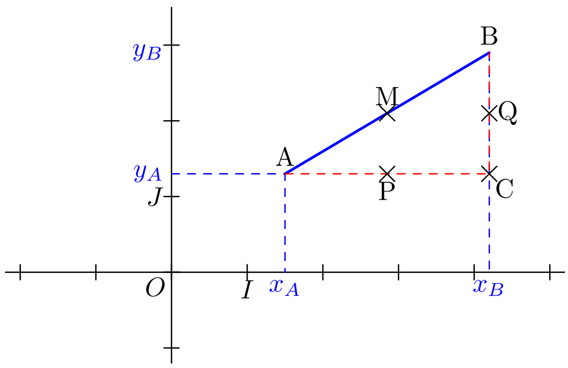
1er cas : $x_A = x_B$ ou $y_A = y_B$.

Prenons par exemple $y_A = y_B$ avec $x_B > x_A$. M est le milieu de [AB] donc M ∈ [AB] et MA = MB. On a donc clairement $y_M = y_A (= y_B)$ et donc $MA = x_M - x_A$ et $MB = x_B - x_M$. En résolvant MA = MB on obtient $2x_M = x_A + x_B$ d'où le résultat.



2e cas : $x_A \neq x_B$ et $y_A \neq y_B$.

Soit C le point du plan de coordonnées $(x_B; y_A)$. Le repère étant orthonormé, le triangle ABC est rectangle en C. On note respectivement P et Q les milieux de [AC] et [CB]. En appliquant le 1er cas on obtient $P\left(\frac{x_A+x_B}{2}; y_A\right)$ et $Q\left(x_B; \frac{y_B+y_A}{2}\right)$.
En utilisant deux fois la propriété de la droite des milieux, on obtient que (MP) est parallèle à (BC) et que (MQ) est parallèle à (AC) et donc les coordonnées de M sont $(x_P; y_Q)$.



Exemple 2.1
Dans un repère, on donne A(2; −4), B(−4; 5) et $I(-1; \frac{1}{2})$. Montrer que A est le symétrique de B par rapport à I.

2.3 Distance entre deux points

Propriété 2.2
Soit $(O; I, J)$ un repère *orthonormé* du plan. Soit A et B deux points du plan de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$. Alors la distance AB est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$$

Démonstration :
Il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore...

Remarque 2.2
Attention cette formule n'est valable que si le repère est orthonormé !

Exemple 2.2
Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$ on donne $A(3; 2)$ et $B(-1; 6)$. Montrer que ABI est un triangle rectangle. Qu'en est-il du triangle ABJ ? Justifier.

Exemple 2.3
Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$ on donne $A(-2; 2)$, $B(1; 1)$, $C(-2; -2)$ et $\Omega(-1; 0)$ (Ω est une lettre majuscule de l'alphabet grec qui se lit « omega »). Montrer que Ω est le centre du cercle circonscrit à ABC.

2.4 Quelques algorithmes...

Exemple 2.4
L'algorithme 3 permet de déterminer si un point M est sur la médiatrice d'un segment [AB] lorsqu'on connaît les coordonnées de ces trois points dans un repère orthonormé.

Entrées : Demander les coordonnées $(x_A; y_A)$ de A;
Demander les coordonnées $(x_B; y_B)$ de B;
Demander les coordonnées $(x; y)$ de M;
début
    Calculer $c_1 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2$;
    Calculer $c_2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$;
    si $c_1 = c_2$ **alors**
        Afficher « Oui, M appartient à la médiatrice de [AB] » ;
    sinon
        Afficher « Non, M n'est pas sur la médiatrice de [AB] » ;
fin

Algorithme 3 : Un point appartient-il à la médiatrice d'un segment ?

Exemple 2.5
Écrire l'algorithme permettant de déterminer la nature d'un triangle connaissant les coordonnées des trois sommets dans un repère orthonormé.

« *Si tous ceux qui croient avoir raison n'avaient pas tort, la vérité ne serait pas loin* »
PIERRE DAC

Chapitre 3

Étude qualitative de fonctions

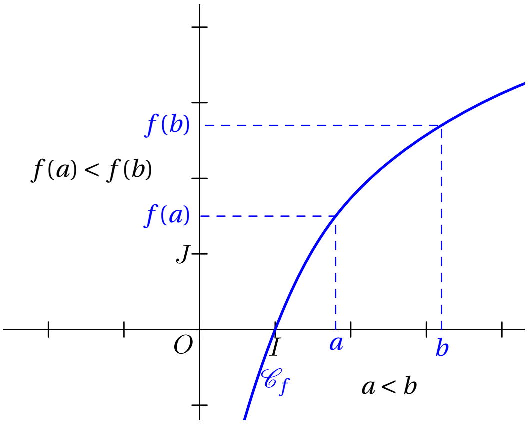
3.1 Variations d'une fonction

3.1.1 Sens de variation

Définition 3.1
Soit f une fonction définie sur un intervalle I :
- on dit que f est *strictement croissante* sur I lorsque pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$;
- on dit que f est *strictement décroissante* sur I lorsque pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

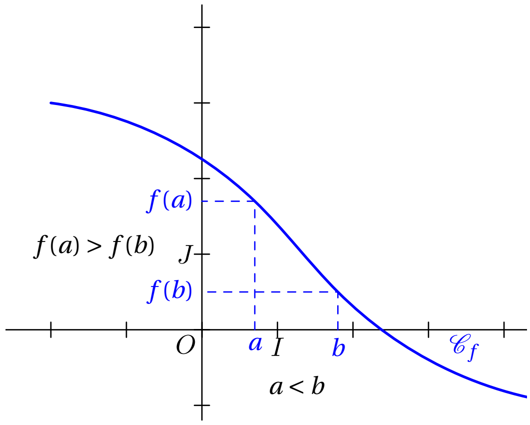
Interprétation graphique :

Fonction strictement croissante :



Pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ « monte » lorsqu'on se déplace vers la droite.

Fonction strictement décroissante :

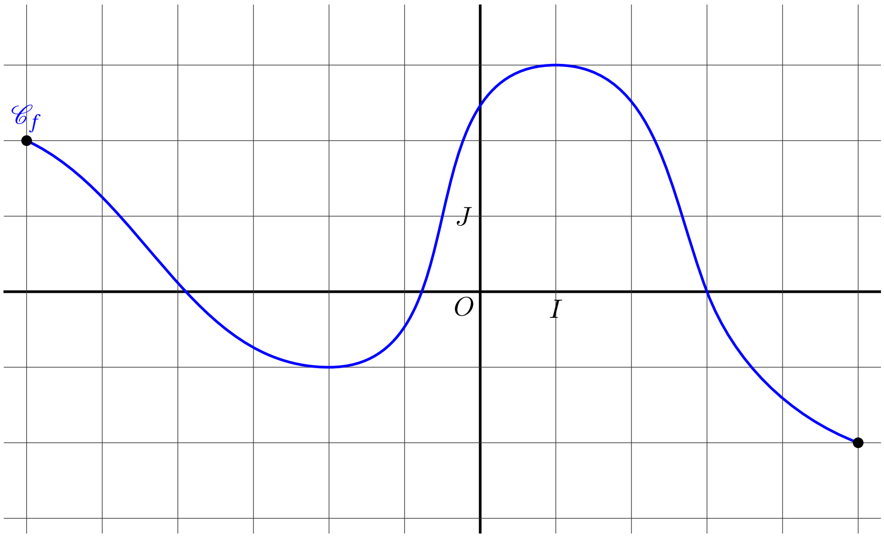


Pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ « descend » lorsqu'on se déplace vers la droite.

3.1.2 Tableau de variation

Définition 3.2
Étudier les variations d'une fonction, c'est déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est strictement croissante et ceux sur lesquels elle est strictement décroissante. On regroupe ces résultats dans un tableau appelé *tableau de variation*.

Exemple 3.1
On a tracé ci-dessous la courbe représentant une fonction f définie sur l'intervalle $I = [-6\,;5]$. En observant cette courbe, dresser le tableau de variation de f sur I.



En observant le graphique on remarque que :
- sur l'intervalle $[-6\,;-2]$, la courbe « descend » losqu'on se déplace de la gauche vers la droite : sur cet intervalle la fonction f est strictement décroissante ;
- sur l'intervalle $[-2\,;1]$, la courbe « monte » losqu'on se déplace de la gauche vers la droite : sur cet intervalle la fonction f est strictement croissante ;
- sur l'intervalle $[1\,;5]$, la courbe « descend » losqu'on se déplace de la gauche vers la droite : sur cet intervalle la fonction f est strictement décroissante.

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	-6		-2		1		5
f	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2

Les valeurs 2, -1, 3 et -2 placées dans le tableau sont les images respectives de -6, -2, 1 et 5. On les obtient ici par lecture graphique. Dans le cas où on connait l'expression de $f(x)$ en fonction de x, on les calcule.

Par convention, dans un tableau de variation, une flèche vers le bas signifie que la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle considéré et une flèche vers le haut signifie qu'elle est strictement croissante.

Remarque 3.1
Lorsqu'une fonction a une (ou plusieurs) valeur(s) interdite(s), on l'indique dans le tableau de variation par une double barre verticale :
prenons par exemple la fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. La fonction f a une valeur interdite : $x = 0$ et on montrera dans le chapitre 9 qu'elle est décroissante sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $\mathbf{R}_+^*$.
On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

3.2 Extremums

Définition 3.3
Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; et soit $a \in \mathrm{I}$:
- on dit que $f(a)$ est le maximum de f sur I si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \leq f(a)$. On dit aussi que f atteint son maximum sur I pour $x = a$;
- on dit que $f(a)$ est le minimum de f sur I si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \geq f(a)$. On dit aussi que f atteint son minimum sur I pour $x = a$.

Dans les deux cas on dit que $f(a)$ est un extremum pour f sur I.

Exemple 3.2
Dans l'exemple 3.1, le maximum de f sur $[-6; 5]$ est 3 ; il est atteint pour $x = 1$. Le minimum de f sur ce même intervalle est -2 ; il est atteint pour $x = 5$.
Toujours dans cet exemple, $f(-2) = -1$ est un minimum pour f sur l'intervalle $[-6; 1]$.

Remarque 3.2
Pour montrer que m est le minimum d'une fonction f sur un intervalle I il suffit de montrer que :
- pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a $f(x) - m \geq 0$;
- et qu'il existe $x_0 \in \mathrm{I}$ tel que $f(x_0) = m$.

De même, M est le maximum d'une fonction f sur un intervalle I si :
- pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a $f(x) - \mathrm{M} \leq 0$;
- et s'il existe $x_0 \in \mathrm{I}$ tel que $f(x_0) = \mathrm{M}$.

3.3 Quelques cas particuliers

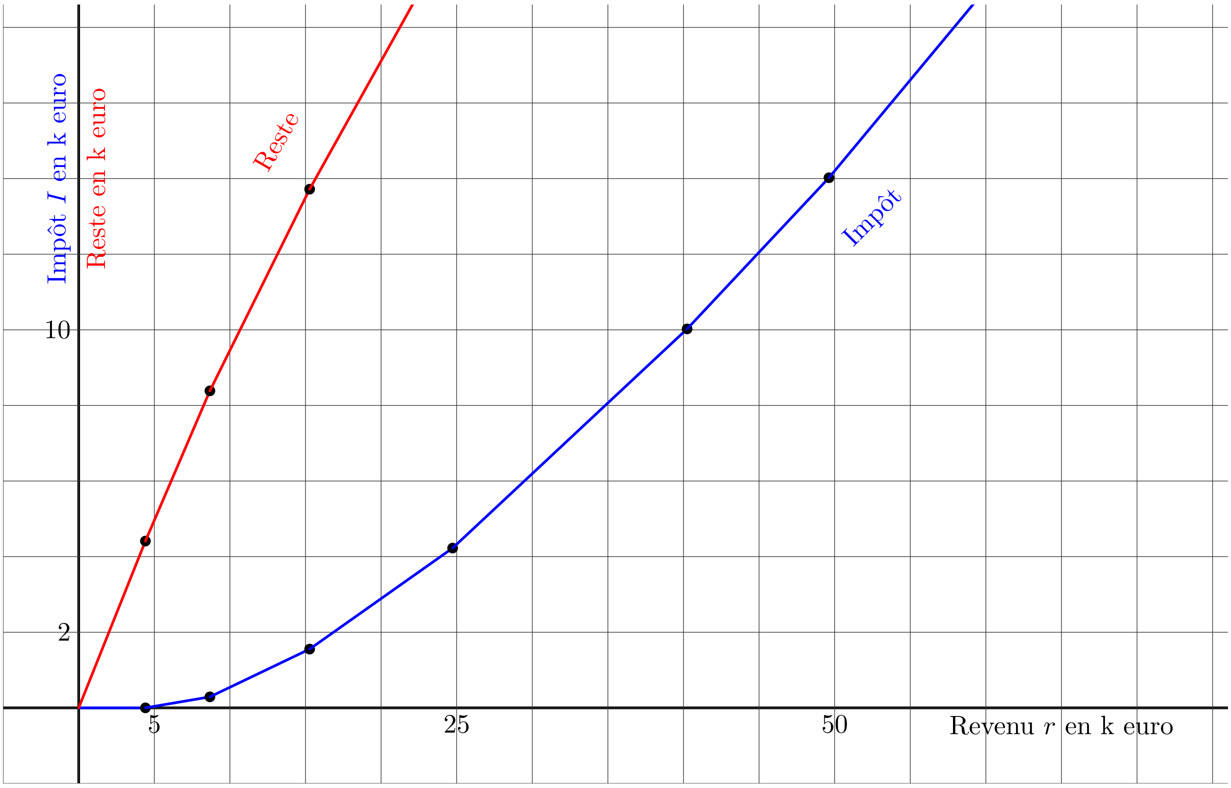
3.3.1 Fonction définie par morceaux

Exemple 3.3
En 2006, l'impôt sur le revenu d'une personne célibataire était calculé « par tranches ». En notant r son revenu annuel, le montant de l'impôt I est :
- si $r < 4\,412$ alors $\mathrm{I} = 0$;
- si $4\,412 \leq r < 8\,677$ alors $\mathrm{I}(r) = r \times 0{,}068\,3 - 301{,}84$;
- si $8\,677 \leq r < 15\,274$ alors $\mathrm{I}(r) = r \times 0{,}191\,4 - 1\,369{,}48$;
- si $15\,274 \leq r < 24\,731$ alors $\mathrm{I}(r) = r \times 0{,}282\,6 - 2\,762{,}47$;
- si $24\,731 \leq r < 40\,241$ alors $\mathrm{I}(r) = r \times 0{,}373\,8 - 5\,017{,}93$;
- si $40\,241 \leq r < 49\,624$ alors $\mathrm{I}(r) = r \times 0{,}426\,2 - 7\,126{,}56$;
- si $r > 49\,624$ alors $\mathrm{I}(r) = r \times 0{,}480\,9 - 9\,841$.

Un contribuable qui gagnait 20 000 € était dans la « tranche » à 28,26%. Son impôt était donc de :

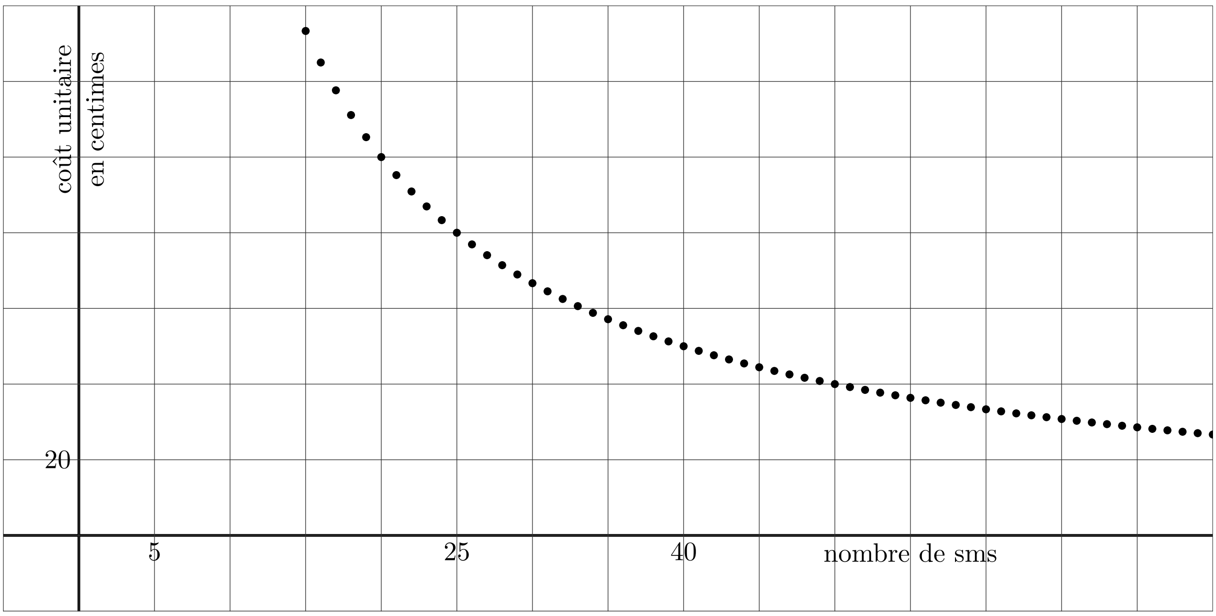
$$\mathrm{I}(20\,000) = 20\,000 \times 0{,}282\,6 - 2\,762{,}47 = 2\,889{,}53 \text{ €}$$

C'est-à-dire qu'il payait $\frac{2\,889{,}53}{20\,000} \approx 14{,}4\%$ de ses revenus en impôts.
On dit que I est une fonction de r définie par morceaux : l'expression à utiliser pour calculer $\mathrm{I}(r)$ dépend de l'intervalle dans lequel est r. Ici, il s'agit même d'une fonction affine par morceaux.
La représentation graphique d'une telle fonction est une succession de morceaux de courbes. Dans l'exemple des impôts, il s'agit d'une succession de segments suivie d'une demi-droite. En observant cette représentation graphique on constate que le fait de « changer de tranche d'imposition » n'augmente pas l'impôt d'un « saut » ainsi la somme restante après impôt est toujours croissante lorsque le revenu augmente.



3.3.2 Fonction définie en quelques valeurs

Exemple 3.4
Un forfait de téléphonie permet d'envoyer autant de sms que l'on veut pour un abonnement de 20 € par mois. On note f la fonction qui au nombre n de sms enoyé au cours du mois associe le prix de revient du sms en centimes.
On a $f(n) = \frac{2000}{n}$. Et cette fonction est définie pour n entier naturel non nul : f n'est pas définie sur un intervalle mais sur $\mathbf{N}^*$.
Sa représentation graphique sera une succession de points non reliés les uns aux autres.
En première, une telle fonction sera appelée *suite numérique*.

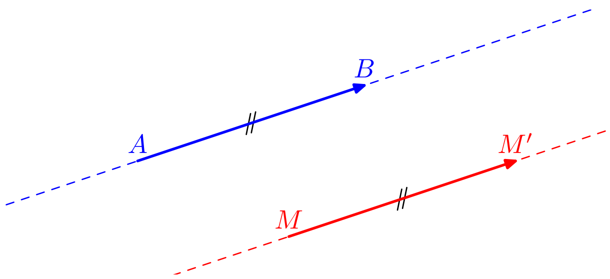


Chapitre 4

Vecteurs du plan

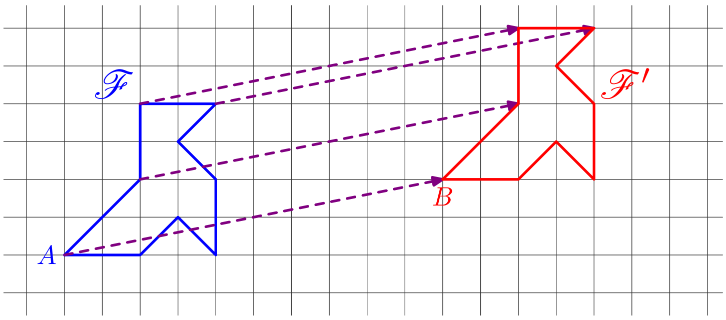
4.1 Translation

Définition 4.1
Soit A et B deux points distincts du plan et soit M un point quelconque.
Lorsqu'on fait « glisser » le point M suivant la *direction* de (AB), dans le *sens* de A vers B et de la *longueur* AB, on obtient un point M′ qui est appelé image de M par la *translation* qui transforme A en B.



Remarque 4.1 (direction et sens)
On dit que (MM′) et (AB) ont la même *direction* car elles sont parallèles.
Le sens de A vers B n'est pas le même que celui de B vers A.

Définition 4.2
L'image d'une figure par une translation est la figure constituée des images de chacun des points de la figure initiale.



$\mathscr{F}'$ est l'image de $\mathscr{F}$ par la translation qui transforme A en B.

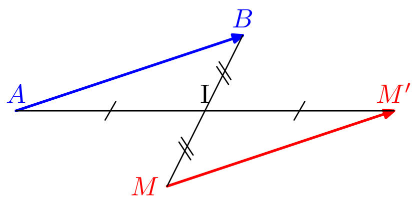
Propriété 4.1
Si M′ est l'image de M par la translation qui transforme A en B alors ABM′M est un parallélogramme.

Idée de la démonstration :
- les droites (AB) et (MM′) ont la même direction donc elles sont parallèles ;
- les points A et B sont dans le même sens que les points M′ et M donc le quadrilatère ABM′M n'est pas croisé ;
- on a AB = MM′.

Or, un quadrilatère non croisé ayant deux côtés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme donc, ABM′M est un parallélogramme.

Propriété 4.2
Réciproquement, si ABNM est un parallélogramme, alors N est l'image de M par la translation qui transforme A en B.

Remarque 4.2 (Construction)
Pour construire l'image M′ de M par la translation qui transforme A en B, il suffit donc de construire le milieu I de [BM] et le point M′ est alors l'image de M par la symétrie de centre I.



4.2 Vecteur du plan

4.2.1 Vecteur et translation

Définition 4.3
Un *vecteur* du plan est un objet mathématique défini par :
- une *direction* (c'est à dire une droite) ;
- un *sens* (sur la droite) ;
- une *longueur* qu'on appelle aussi *norme*.

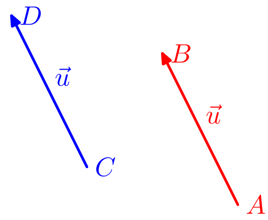
Un vecteur est noté par une lettre surmontée d'une flèche de la gauche vers la droite et la norme d'un vecteur $\vec{u}$ est notée $||\vec{u}||$.

Remarque 4.3
Les trois caractéristiques d'un vecteur (direction, sens et norme) sont les mêmes que celles d'une translation. Désormais la translation qui transforme un point A en un point B sera nommée *translation de vecteur* $\overrightarrow{AB}$. Un vecteur caractérise donc entièrement une translation.

Remarque 4.4
Les trois caractéristiques d'un vecteur (direction, sens et norme) ne permettent pas de lui donner une *position*. Lorsqu'on « trace » un vecteur, on n'en donne en fait qu'un *représentant*.
Chaque vecteur a une infinité de représentants.

Remarque 4.5
Sur la figure ci-après on a représenté deux fois un vecteur $\vec{u}$. La flèche de droite est le représentant de $\vec{u}$ d'*origine* A et d'*extrémité* B. On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$:
- la direction de $\vec{u}$ est celle de la droite (AB) (et de la droite (CD)) ;

– le sens de $\vec{u}$ est celui de A vers B (ou de C vers D) ;
– la norme de $\vec{u}$ est la distance AB (ou la distance CD). On a $||\vec{u}|| = \mathrm{AB} = \mathrm{CD}$.

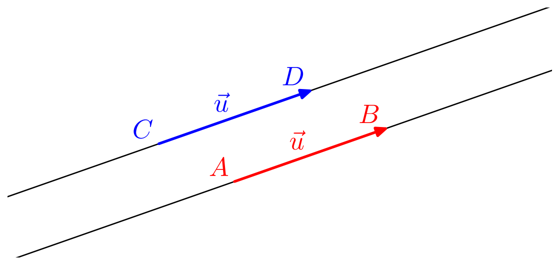


Remarque 4.6 (Cas particulier)
Le vecteur qui a une norme nulle est appelé *vecteur nul*. On le note $\vec{0}$. Le vecteur nul n'a ni direction, ni sens.

4.2.2 Vecteurs égaux

Définition 4.4
Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

Exemple 4.1
Sur la figure ci-dessous, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont égaux car :
– les droites (AB) et (CD) sont parallèles (même direction) ;
– le sens de A vers B est le même que celui de C vers D ;
– la distance AB et la distance CD sont égales.

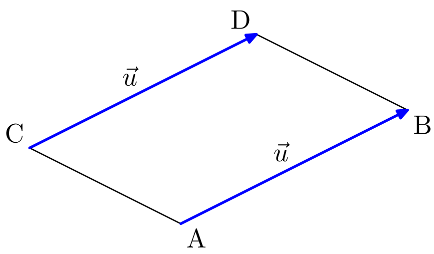


Propriété 4.3
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Pour un point A donné, il existe un unique point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AM}}$.
On dit aussi qu'il existe un unique représentant du vecteur $\vec{u}$ ayant pour origine A. Son extremité est le point M. On a alors $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Définition 4.5
Deux vecteurs sont dits *opposés* s'ils ont la même direction, la même norme mais qu'ils sont de sens contraire.

4.2.3 Vecteurs et parallélogramme

Propriété 4.4
Soit A, B, C et D quatre points du plan :
– si $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$, alors ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati) ;
– réciproquement, si ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati), alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$.



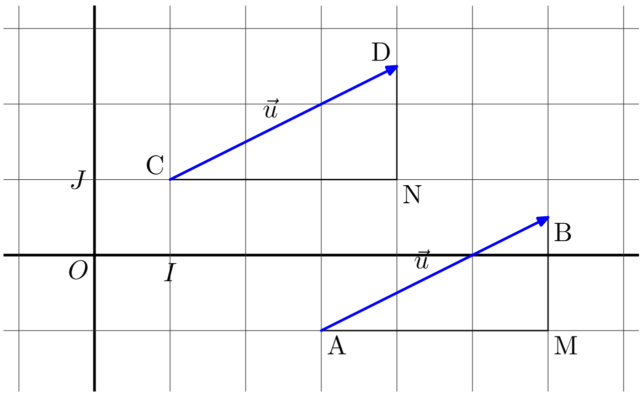
Remarque 4.7
La propriété 4.4 peut aussi s'énoncer comme suit :
soit A, B, C et D quatre points non alignés du plan. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).
Les propositions « $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ » et « ABDC est un parallélogramme » sont dites *équivalentes*.

4.3 Coordonnées d'un vecteur

Propriété 4.5
Soit $\vec{u}$ un vecteur dont on connaît deux représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ dans un repère $(O; I, J)$. Alors on a :

$$x_B - x_A = x_D - x_C \text{ et } y_B - y_A = y_D - y_C$$

Démonstration :
On se place dans le cas particulier d'un repère orthonormé.
Soit $M(x_B; y_A)$ et $N(x_D; y_C)$. Les triangles ABM et CDN sont alors rectangles respectivement en M et N et leurs hypoténuses [AB] et [CD] sont de même longueur.
De plus en utilisant les propriétés des angles alterne-interne, on montrerait sans trop de difficulté que $\widehat{BAM} = \widehat{DCN}$; ainsi, en utilisant les sinus et cosinus on obtient MA = NC et BM = DN.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ étant de même sens, les égalités de longueur se traduisent par $x_A - x_B = x_C - x_D$ et $y_A - y_B = y_C - y_D$.



Définition 4.6
En utilisant les notations de la propriété 4.5, on appelle *coordonnées* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ le couple $(x_B - x_A; y_B - y_A)$. On note :

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A) \text{ ou } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Remarque 4.8
Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont donc les coordonnées du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

Propriété 4.6
Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

Exemple 4.2
Dans un repère (O;I,J) on donne $A(-1;1)$, $B(3;4)$, $C(5;2)$ et $D(1;-1)$. Montrer que ABCD est un parallélogramme.
On a :

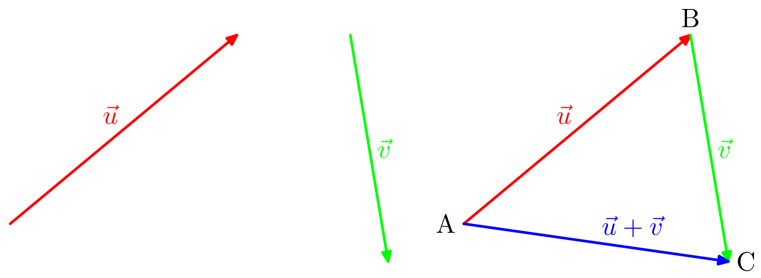
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 4-1 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5-1 \\ 2-(-1) \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On a donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et donc ABCD est un parallélogramme.

4.4 Somme de deux vecteurs

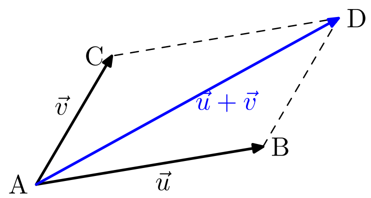
Définition 4.7
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On obtient le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ en procédant comme suit :
- on choisit un point A et on construit le représentant [1] de $\vec{u}$ d'origine A ; ce représentant a pour extremité B ;
- on construit le représentant de $\vec{v}$ d'origine B, il a pour extremité C ;
- on a alors $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.

On écrit aussi : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Cette égalité est appelée *relation de* CHASLES [2].



Propriété 4.7 (règle du parallélogramme)
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ des représentants respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant la même origine A.
Si D est le point tel que ABDC soit un parallélogramme (éventuellement aplati), alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$



Remarque 4.9 (Attention !)
En général, $||\vec{u}+\vec{v}|| \neq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$. Sur la figure ci-dessus, $AD \neq AB + AC$.

Propriété 4.8
On se place dans un repère (O;I,J). Soit $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs et leurs coordonnées dans ce repère. Alors le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x';y+y')$.

Exemple 4.3
Dans un repère orthonormé (O;I,J), soit $A(4;1)$ et $B(2;3)$.

1. Il est unique : voir la propriété 4.3
2. Michel CHASLES (1793-1880) : homme de sciences français. La relation qui porte son nom était en fait utilisée avant lui. . . .

1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
2. Le point D est tel que OADB est un parallélogramme. Que peut-on dire de $\overrightarrow{OD}$ par rapport à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$? En déduire les coordonnées de D.
3. En déduire la longueur de la diagonale OD.

Solution :

1. Les coordonnées sont $\overrightarrow{OA}(4;1)$ et $\overrightarrow{OB}(2;3)$.
2. D'après la règle du parallélogramme (propriété 4.7), on a $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Donc les coordonnées de $\overrightarrow{OD}$ sont $(4+2;1+3)$ soit $\overrightarrow{OD}(6;4)$.
   Or les coordonnées de O sont $(0;0)$ donc $D(6;4)$.
3. Le repère étant orthonormé on a : $OD = \sqrt{(x_D - x_O)^2 + (y_D - y_O)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 4\sqrt{13}$.

Remarque 4.10
Dans un repère si $\vec{u}$ est un vecteur de coordonnées $(x;y)$, alors le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ a pour coordonnées $(x;y)$ (voir la remarque 4.8). On a donc $||\vec{u}|| = ||\overrightarrow{OM}|| = OM$.
Ainsi, si le repère est orthonormé, on a :

$$||\vec{OM}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

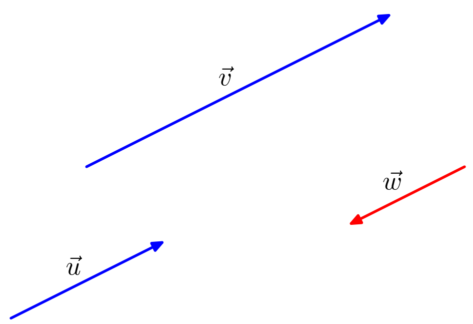
4.5 Vecteurs colinéaires

4.5.1 Produit d'un vecteur par un réel

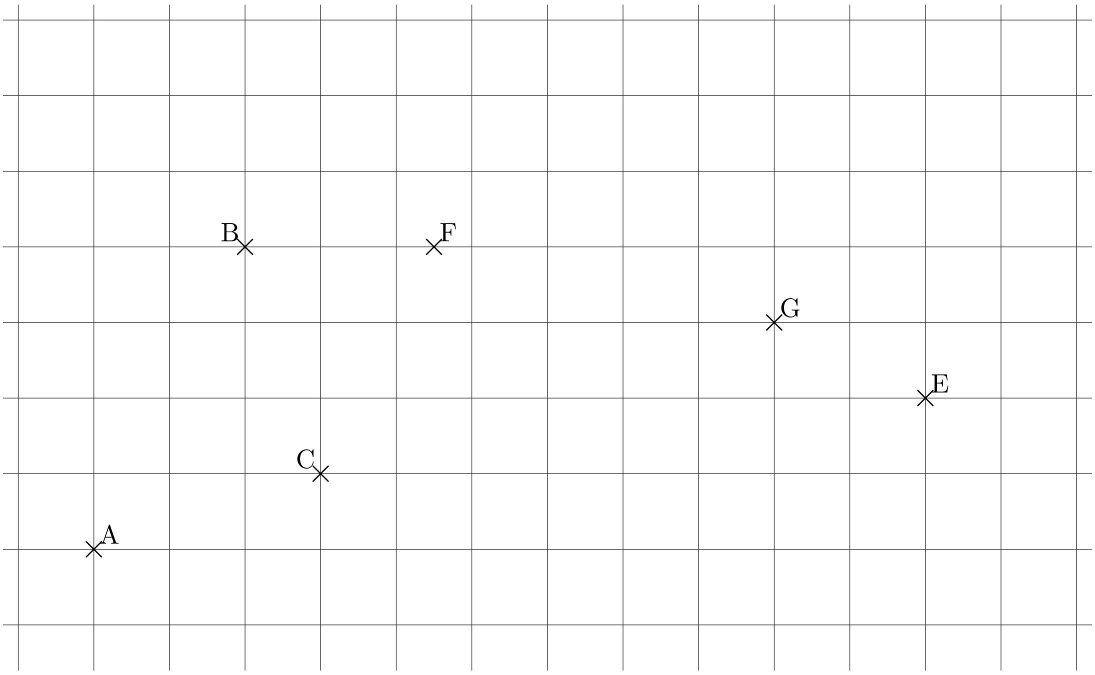
Définition 4.8
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et λ un réel.
Si $\lambda \neq 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, le vecteur $\lambda\vec{u}$ est le vecteur ayant :
- la même direction que le vecteur $\vec{u}$;
- le même sens que $\vec{u}$ si $\lambda > 0$ et le sens contraire de $\vec{u}$ si $\lambda < 0$;
- **si** $\lambda \geq 0$**,** alors $||\lambda\vec{u}|| = \lambda \times ||\vec{u}||$;
  si $\lambda < 0$**,** alors $||\lambda\vec{u}|| = -\lambda \times ||\vec{u}||$.

Si $\lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, alors on a : $\lambda\vec{u} = \vec{0}$.

Exemple 4.4
On a tracé ci-dessous le représentant d'un vecteur $\vec{u}$. En posant $\vec{v} = 2\vec{u}$ et $\vec{w} = -\frac{3}{4}\vec{u}$, on a :
$\vec{v}$ a la même direction que $\vec{u}$, il est de même sens car $2 > 0$ et sa norme vaut $2||\vec{u}||$.
$\vec{w}$ a la même direction que $\vec{u}$, il est de sens contraire car $-\frac{3}{4} < 0$ et sa norme vaut $\frac{3}{4}||\vec{u}||$.



Exemple 4.5
Dans le quadrillage ci-après, on a placé quatre points A, B, C et D.



Placer les points E, F et G vérifiant les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}; \qquad \overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EC}; \qquad \overrightarrow{EG} = -2\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \mathrm{BF}$$

Propriété 4.9
Soit $(O;I,J)$ un repère du plan, λ un réel et $\vec{u}(x;y)$ un vecteur et ses coordonnées dans le repère. Alors le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x;\lambda y)$ dans ce repère.

Démonstration :
il suffit[3] d'utiliser le théorème de THALÈS.

Propriété 4.10
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et λ[4] et μ[5] deux réels quelconques. Alors on a :

$$\lambda \times (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}; \qquad (\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}; \qquad \lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$$

Exemple 4.6
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Alors :
$2\vec{u} + 3\vec{u} = (2+3)\vec{u} = 5\vec{u}$.
$3(\vec{u} - 2\vec{v}) + 2(\vec{u} + \vec{v}) = 3\vec{u} - 6\vec{v} + 2\vec{u} + 2\vec{v} = (3+2)\vec{u} + (-6+2)\vec{v} = 5\vec{u} - 4\vec{v}$.
$3(\vec{u} + 2\vec{v}) + \vec{u} - 4(\vec{u} + \vec{v}) - 2\vec{v} = 3\vec{u} + 6\vec{v} + \vec{u} - 4\vec{u} - 4\vec{v} - 2\vec{v} = (3+1-4)\vec{u} + (6-4-2)\vec{v} = \vec{0}$.

4.5.2 Vecteurs colinéaires

Définition 4.9
Deux vecteurs sont dits *colinéaires* s'ils ont la même direction.
Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs du plan.

3. Je vous le laisse en exercice…
4. λ (ou Λ en majuscule) se lit *lambda* ; c'est la 11^{e} lettre de l'alphabet grec. Elle correspond à notre « L ».
5. μ se lit *mu* ; c'est la 12^{e} lettre de l'alphabet grec. Elle correspond à notre « M ».

Propriété 4.11
Soit A, B, C et D quatre points du plan avec $A \neq B$ et $C \neq D$. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Démonstration :
Il suffit d'écrire que deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont la même direction...

Propriété 4.12
Soit A, B, C trois points du plan.
Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Démonstration :
Les points sont alignés si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont parallèles (car deux droites parallèles ayant un point commun sont confondues) et donc si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Remarque 4.11
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Théorème 4.1
Soit $(O; I, J)$ un repère du plan et dans ce repère on donne deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

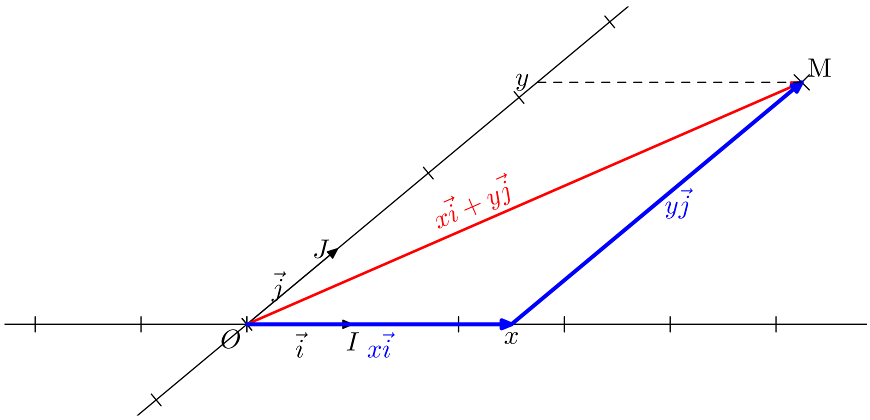
Démonstration :
- Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs colinéaires. Il existe alors $\lambda \in \mathbf{R}^*$ tel que : $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.
  Supposons que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. Alors $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda x' \\ y = \lambda y' \end{array}\right.$. Donc :
  $$xy' - x'y = (\lambda x')y' - x'(\lambda y') = \lambda x'y - \lambda x'y' = 0$$
- Réciproquement, soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $xy' - x'y = 0$:
  - si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ;
  - si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors, soit x, soit y est non nul. Supposons que $x \neq 0$.
    Alors $y' = \frac{x'y}{x}$ donc $y' = \frac{x'}{x}y$. Ainsi en posant $\lambda = \frac{x'}{x}$, on a :
    $\left\{\begin{array}{l} x' = x' \times \frac{x}{x} = \frac{x'}{x} \times x = \lambda x \\ y' = \frac{x'}{x}y = \lambda y \end{array}\right.$ Donc $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Exemple 4.7
Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on donne : $A(2; -1)$, $B(8; -4)$, $C(-1; 3)$ et $D(1; 2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont-ils colinéaires ? Même question pour $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

Exemple 4.8
Dans un repère $(O; I, J)$ on donne : $A(-1; 1)$, $B(1; -1)$, $\vec{u}(1; 1)$ et $\vec{v}(-2; 1)$.
Déterminer les coordonnées de M pour que : $\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ soient colinéaires} \\ \overrightarrow{BM} \text{ et } \vec{v} \text{ soient colinéaires} \end{array}\right.$
Soit $M(x; y)$ vérifiant les conditions proposées. On a :
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires si et seulement si $(x+1)\times 1 - 1\times(y-1) = 0$ soit $x - y = -2$.
$\overrightarrow{BM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(x-1)\times 1 - (-2)\times(y+1) = 0$ soit $x + 2y = -1$.
On résout alors le système $\begin{cases} x - y = -2 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$. On obtient $\begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$. Donc $M(-\frac{5}{3}; \frac{1}{3})$.

Remarque 4.12
On se place dans un repère (O; I, J). On note $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$. Pour tout point $M(x; y)$, on a alors $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
Réciproquement, si on se donne un point O et deux vecteurs non nuls et non colinéaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$, on peut noter I et J les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$. Alors le point M tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ a pour coordonnées $(x; y)$ dans le repère (O; I, J).



Désormais, le repère (O; I, J) sera noté $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

4.6 Quelques algorithmes

En utilisant les coordonnées, on peut écrire des algorithmes permettant de calculer les coordonnées d'un vecteur, de déterminer si deux vecteurs sont colinéaires, si deux droites sont parallèles, si trois points sont alignés, ...

Exemple 4.9
L'algorithme 4 permet de déterminer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ connaissant celles de A et de B.

Entrées : Demander les coordonnées $(x_A; y_A)$ de A;
Demander les coordonnées $(x_B; y_B)$ de B;
début
    Calculer $x = x_B - x_A$;
    Calculer $y = y_B - y_A$;
    Afficher « Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(x; y)$ » ;
fin

Algorithme 4 : Coordonnées d'un vecteur

Exemple 4.10
L'algorithme 5 permet de déterminer si deux vecteurs sont colinéaires et d'afficher le coefficient de colinéarité (s'il existe).

Entrées : Demander les coordonnées $(x; y)$ de $\vec{u}$;
Demander les coordonnées $(x'; y')$ de $\vec{v}$;
début
    Calculer $r = xy' - x'y$;
    si $r = 0$ **alors**
        Afficher « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires » ;
        si $x \neq 0$ **alors**
            Calculer $\lambda = \frac{x'}{x}$;
            Afficher « Et $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ » ;
        sinon
            si $x' \neq 0$ **alors**
                Calculer $\lambda = \frac{x}{x'}$;
                Afficher « Et $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ » ;
    sinon
        Afficher « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires » ;
fin

Algorithme 5 : Vecteurs colinéaires ?

Exemple 4.11

Écrire un algorithme qui, connaissant les coordonnées de trois points dans un repère détermine si ces points sont alignés.

Chapitre 5

Fonctions affines

5.1 Fonction affine

5.1.1 Définition

Définition 5.1
Une fonction affine est une fonction définie sur **R** par $f(x) = mx + p$ où m et p sont deux nombres réels.
Si $p = 0$ alors f est une fonction linéaire.

Propriété 5.1
On considère une fonction affine f définie par $f(x) = mx + p$.
- Si $m > 0$, alors f est strictement croissante sur **R**.
- Si $m = 0$, alors f est constante sur **R**.
- Si $m < 0$, alors f est strictement décroissante sur **R**.

Tableaux de variations d'une fonction affine :

Si $m > 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\nearrow$	

Si $m = 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\rightarrow$	

Si $m < 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\searrow$	

5.1.2 Caractérisation

Théorème 5.1
Soit f une fonction définie sur **R**. La fonction f est une fonction affine si et seulement si pour tous réels distincts a et b, le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est constant.
Cela signifie que l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable.

Démonstration :
- Soit f une fonction affine. On a : $f(x) = mx + p$. Montrons que pour $a \neq b$, le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est constant :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(mb+p)-(ma+p)}{b-a} = \frac{mb-ma}{b-a} = \frac{m(b-a)}{b-a} = m$$

- Soit f une fonction vérifiant $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = m$ pour tous réels a et b. On pose $p = f(0)$. Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a :
  $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = m$ donc : $\frac{f(x)-p}{x} = m$
  Ainsi : $f(x) = mx + p$ pour tout $x \in \mathbf{R}^*$. De plus $f(0) = p = m \times 0 + p$, donc $f(x) = mx + p$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Remarque 5.1 (Détermination de m et p)
Si f est une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$, alors :
$p = f(0)$ et pour tout $a \in \mathbf{R}$ et tout $b \neq a$, on a $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

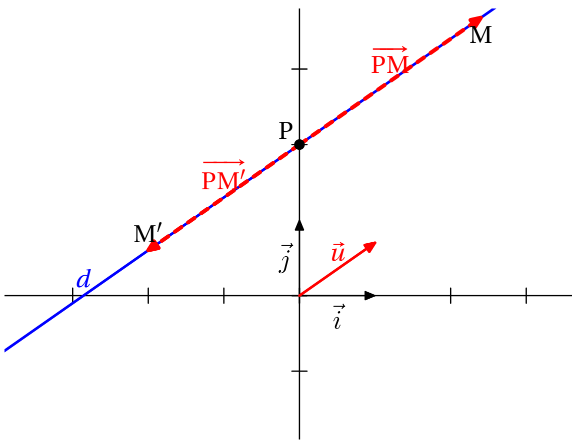
Exemple 5.1
Soit f une fonction affine telle que $f(1) = 4$ et l'image de 5 par f est 6.
La fonction f est affine donc $f(x) = mx + p$.
On a $m = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{6-4}{5-1} = \frac{1}{2}$; donc $f(x) = \frac{1}{2}x + p$.
De plus, $f(1) = 4$ donc $\frac{1}{2} \times 1 + p = 4$ donc $p = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.
Donc $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

5.2 Représentation graphique

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$. La représentation graphique de f dans un repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est l'ensembles des points $\mathrm{M}(x; y)$ vérifiant $y = f(x)$.

Propriété 5.2
La représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto mx+p$ dans un repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est la droite passant par $\mathrm{P}(0; p)$ et dont la direction est donnée par le vecteur $\vec{u}(1; m)$.

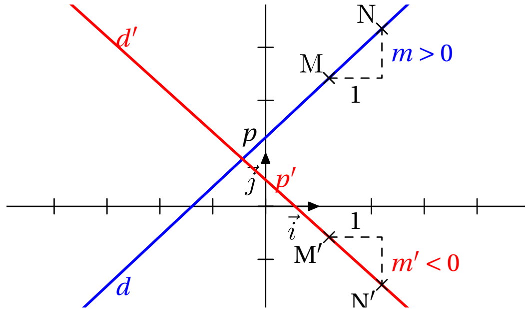
Démonstration
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:
- montrons que $\mathrm{P}(0; p) \in \mathscr{C}_f$: on a $f(0) = m \times 0 + p = p$ donc $\mathrm{P}(0; p) \in \mathscr{C}_f$;
- soit $x \in \mathbf{R}^*$ on a $\mathrm{M}(x; mx + p) \in \mathscr{C}_f$ et donc le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix}$ soit $x\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$. Ainsi tout vecteur $\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}(1, m)$ donc les points M sont tous alignés sur la droite passant par P et de direction donnée par $\vec{u}$.



Définition 5.2
Dans les conditions de la propriété 5.2, en nommant d la représentation graphique de f, on dit que $\vec{u}$ est un *vecteur directeur* de la droite d et que $y = mx + p$ est *l'équation réduite* de la droite d.

Interprétation graphique de m et p :

p est l'ordonnée du point d'intersection de d avec l'axe des ordonnées (yy').
m est la différence des ordonnées de deux points M et N de d tels que $x_N = x_M + 1$.



5.3 Signe d'une fonction affine

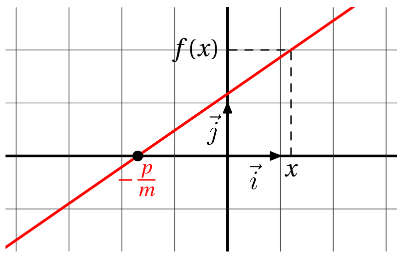
Soit f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$.
Si $m \neq 0$, la représentation graphique de f est une droite d qui coupe l'axe des abscisses au point $A(-\frac{p}{m} ; 0)$. En effet $f(-\frac{p}{m}) = m \times (-\frac{p}{m}) + p = -p + p = 0$.

On a alors deux cas possibles :

Si $m > 0$ alors f est croissante donc pour tout $x < -\frac{p}{m}$, on a $f(x) < f(-\frac{p}{m}) = 0$ et pour tout $x > -\frac{p}{m}$, on a $f(x) > 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Interprétation graphique :
La fonction affine est croissante :

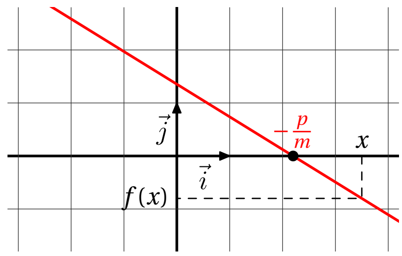


Pour tout $x < -\frac{p}{m}$, on a $f(x) < 0$.
Pour tout $x > -\frac{p}{m}$, on a $f(x) > 0$.

Si $m < 0$ alors f est décroissante donc pour tout $x < -\frac{p}{m}$, on a $f(x) > f(-\frac{p}{m}) = 0$ et pour tout $x > -\frac{p}{m}$, on a $f(x) < 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Interprétation graphique :
La fonction affine est décroissante :



Pour tout $x < -\frac{p}{m}$, on a $f(x) > 0$.
Pour tout $x > -\frac{p}{m}$, on a $f(x) < 0$.

« *Pascal combattait ses maux de têtes avec des problèmes de géométrie... Moi je combattais la géométrie en feignant d'avoir des maux de tête.* »
TRISTAN BERNARD

Chapitre 6

Équations

6.1 Définitions et Exemples

Définition 6.1
Une équation est une égalité dans laquelle figure(nt) un (ou plusieurs) nombre(s) inconnu(s). Résoudre l'équation c'est trouver *toutes* les valeurs possibles de l'inconnue (ou des inconnues) pour que l'égalité soit vraie.

Exemple 6.1
$2x^2 - 10x - 10 = x(3 - x)$ est une équation d'inconnue x.
$x = 5$ est une solution de cette équation car en remplaçant x par 5 on a :
- d'une part $2x^2 - 10x - 10 = 2 \times 25 - 10 \times 5 - 10 = -10$;
- d'autre part $x(3 - x) = 5 \times (3 - 5) = -10$ aussi.

Question : le réel $x = -\frac{2}{3}$ est-il aussi une solution de cette équation ?

Certains types d'équations ont des méthodes de résolution par exemple les équations du premier, du deuxième ou du deuxième degré mais pas toutes. Si on ne peut pas résoudre une équation on peut par contre toujours *vérifier* qu'un nombre est solution d'une équation. Pour cela on peut utiliser un algorithme (à programmer ou pas dans un langage informatique…).

Exemple 6.2
On a écrit l'algorithme 6 qui vérifie si un nombre a est solution de l'équation $3x^2 - 5x + 2 = 0$. Appliquer cet algorithme à $a = 1$ puis à $a = -1$.

```
Entrées : Demander le nombre a;
début
    y ← 3a² − 5a + 2;
    si y = 0 alors
        Afficher « a est solution de l'équation » ;
    sinon
        Afficher « a n'est pas solution de l'équation » ;
fin
```

Algorithme 6 : Vérifier qu'un nombre est solution d'une équation

6.2 Équation du premier degré

6.2.1 Définition

Définition 6.2
Une équation du premier degré d'inconnue x est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax+b=0$ où $a\neq 0$.

Exemple 6.3
Les équations suivantes sont-elles des équations du premier degré ?

$$(\mathrm{E}_1) : 3x+5=2-x; \qquad (\mathrm{E}_2) : 3x^2-5x+5=0; \qquad (\mathrm{E}_3) : 2(x-1)^2=2x^2-5x+5$$

6.2.2 Résolution

Propriété 6.1
Soit a un réel non nul et b un réel quelconque. L'équation $ax+b=0$ admet une unique solution qui est $x_0=-\frac{b}{a}$.

Exemple 6.4
Pour résoudre l'équation $3x+5=5x-7$, on n'utilisera pas la propriété 6.1 car elle n'est pas écrite sous la forme $ax+b=0$. On va donc écrire une succesion d'équations équivalentes à la précédente :

$$\begin{aligned}
3x+5=5x-7 &\iff 3x+5-5x=5x-5x-7 && \text{on soustrait } 5x \text{ à chaque membre ;}\\
&\iff -2x+5-5=-7-5 && \text{on soustrait } 5 \text{ à chaque membre ;}\\
&\iff \tfrac{-2x}{-2}=\tfrac{-12}{-2} && \text{on divise les deux membres par } -2\text{ ;}\\
&\iff x=6
\end{aligned}$$

Enfin on écrit l'ensemble solution : $\mathscr{S}=\{6\}$.

6.3 Résolution approchée

Parfois, on n'est pas capable de déterminer la valeur exacte d'une solution à une équation. On peut par contre chercher une valeur approchée de la solution en utilisant une méthode ressemblant au jeu « devine un nombre entre 1 et 100 ; à chaque essai je réponds plus ou moins ».
Nous allons appliquer deux types de méthodes : le balayage et la dichotomie.

6.3.1 Méthode du balayage

Exemple 6.5
Soit l'équation $x^2-x-1=0$. Si on remplace x par 1 on trouve $x^2-x-1=-1<0$; si on remplace x par 2 on trouve $x^2-x-1=1>0$. On peut donc imaginer [1] qu'entre 1 et 2 il existe une valeur de x pour laquelle $x^2-x-1=0$.
Le balayage consiste à calculer toutes les valeurs de x^2-x-1 pour les x variant de 1 à 2 par pas de 0,1. On regroupe les résultats dans un tableau :

1. Ce résultat est vrai sous certaines conditions et s'appelle le théorème des valeurs intermédiaires. Vous le verrez si vous suivez une terminale S ou ES.

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
x^2-x-1	-1	$-0,89$	$-0,76$	$-0,61$	$-0,44$	$-0,25$	$-0,04$	0,19	0,44	0,71	1

On peut donc dire que notre solution x_0 vérifie $1,6 < x_0 < 1,7$. On recommence en « balayant » les valeurs de x entre 1,6 et 1,7 par pas de 0,01 :

x	1,6	1,61	1,62	1,63	1,64	1,65	1,66	1,67	1,68	1,69	1,7
x^2-x-1	$-0,04$	$-0,018$	0,044	0,027	0,050	0,073	0,096	0,12	0,14	0,17	0,19

Ainsi, on obtient $1,61 < x_0 < 1,62$; et en continuant avec un pas de 0,001 puis ... on peut obtenir une valeur approchée de x_0 aussi précise que l'on veut.

Entrées : l'expression $f(x)$;
un entier a tel que $f(a)$ et $f(a+1)$ sont de signes contraires;
le nombre n de chiffres après la virgule souhaités pour la solution approchée;
début
    $i \leftarrow 0$;
    $b \leftarrow a+1$;
    pour $i \leq n$ **faire**
        $h \leftarrow (b-a)/10$;
        tant que *$f(a)$ et $f(a+h)$ sont de même signe* **faire**
            $a \leftarrow a+h$;
        Afficher : la solution est comprise entre a et $a+h$;
        $b \leftarrow a+h$;
fin
Résultat : la solution cherchée est dans $[a;b]$

Algorithme 7 : Résolution approchée par balayage de $f(x)=0$

Exemple 6.6
Faire « tourner » l'algorithme 7 à la main en prenant $f(x)=x^2-x-1$, $a=1$ et $n=2$ (on pourra utiliser les tableaux dressés dans l'exemple 6.5).

Exercice 6.1
Programmer l'algorithme 7 en langage Xcas [2].

6.3.2 Méthode de la dichotomie

La méthode de *dichotomie* (du grec *di* sigifiant deux et *tomein*, couper) consiste à couper en deux un intervalle où se trouve la solution puis à tester si la solution appartient à l'un ou l'autre des deux « morceaux ». On réitère alors ce procédé avec le nouvel intervalle deux fois plus petit et on continue jusqu'à obtenir un encadrement de la taille souhaitée.
Ainsi, après 5 étapes (c'est-à-dire cinq calculs de valeurs de $f(x)$), on a divisé la taille initiale de l'intervalle par $2^5=32$.

2. Le premier à m'envoyer un programme correct par mail aura en points de bonus au prochain DS la solution approchée positive de l'équation $25x^2-10x-1=0$

Exemple 6.7
Reprenons l'équation de l'exemple 6.5 : $x^2 - x - 1 = 0$. On a vu qu'une solution appartient à l'intervalle $[1\,;2]$ car si $x = 1$ alors $x^2 - x - 1 < 0$ et si $x = 2$ alors $x^2 - x - 1 > 0$.
En prenant $x = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$ on a $x^2 - x - 1 = -0{,}25 < 0$ donc $x_0 \in [1{,}5\,; 2]$.
En prenant $x = \frac{1{,}5+2}{2} = 1{,}75$ on a $x^2 - x - 2 = 0{,}312\,5 > 0$ donc $x_0 \in [1{,}5\,; 1{,}75]$...

Entrées : l'expression $f(x)$;
un entier a tel que $f(a)$ et $f(a+1)$ sont de signes contraires;
le nombre n de chiffres après la virgule souhaités pour la solution approchée;
début
    $b \leftarrow a + 1$;
    tant que $b - a > 10^{-n}$ **faire**
        si $f(a)$ *et* $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ *sont de même signe* **alors**
            $a \leftarrow \frac{a+b}{2}$;
        sinon
            $b \leftarrow \frac{a+b}{2}$;
fin
Résultat : la solution cherchée est dans $[a; b]$

Algorithme 8 : Résolution approchée par dichotomie de $f(x) = 0$

Exemple 6.8
Faire « tourner » l'algorithme 8 à la main en prenant $f(x) = x^2 - x - 1$, $a = 1$ et $n = 2$ et comparer le nombre de calculs effectués par rapport à l'algorithme 7.

Exercice 6.2
Programmer l'algorithme 8 en langage Xcas [3].

6.4 Équation produit

L'expression *équation produit* désigne une équation écrite sous la forme $\mathrm{P}(x) \times \mathrm{Q}(x) = 0$ où P et Q sont deux expressions où figurent l'inconnue x.

Exemple 6.9
L'équation $(2x+3)(x^2+1) = 0$ est une équation produit.

Propriété 6.2
Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Application : résolution d'une équation produit.

3. Le premier à m'envoyer un programme correct par mail aura en points de bonus au prochain DS la solution approchée positive de l'équation $25x^2 - 10x - 1 = 0$. Comme dans toute opération commerciale, les bonus des exercices 6.1 et 6.2 ne sont pas cumulables...

On considère l'équation $(4x-7)(x+6)=0$. On utilise la propriété 6.2 :

$$\begin{aligned}(4x-7)(x+6)=0 &\iff 4x-7=0 \text{ ou } x+6=0\\ &\iff 4x=7 \text{ ou } x=-6\\ &\iff x=\tfrac{7}{4} \text{ ou } x=-6\end{aligned}$$

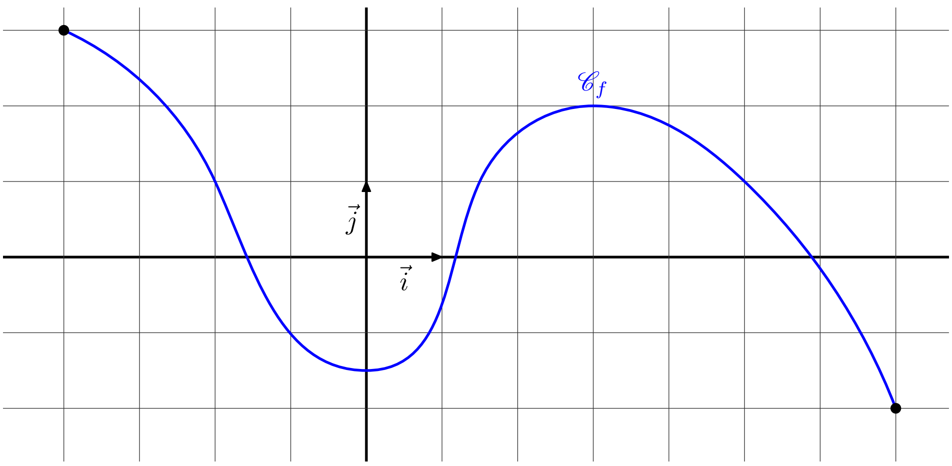
La solution de l'équation est donc $\mathscr{S}=\left\{-6;\frac{7}{4}\right\}$.

6.5 Résolutions graphiques

À savoir

Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=m$ c'est trouver les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui ont pour ordonnée m. Cela revient à rechercher les *antécédents* de m par la fonction f.
Pour déterminer graphiquement les solutions d'une telle équation on cherche les abscisses des points communs entre $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y=m$.

Exemple 6.10
Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-4;7]$.

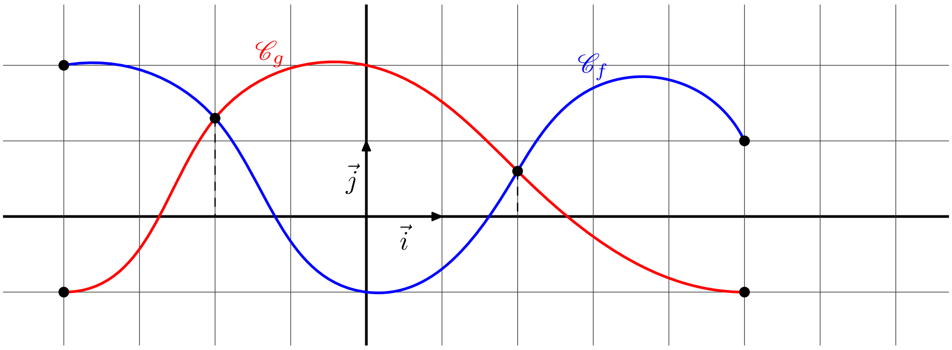


– l'équation $f(x)=2{,}5$ a une unique solution sur $[-4;7]$ car un seul point de $\mathscr{C}_f$ a pour ordonnée 2,5 : il s'agit du point qui a pour abscisse environ $-3{,}3$. On écrit $\mathscr{S}=\{-3{,}3\}$;
– l'équation $f(x)=1$ a trois solutions car il y a trois points de $\mathscr{C}_f$ qui ont pour ordonnée 1 : les points d'abscisses -2 ; 1,5 et 5 ; on écrit $\mathscr{S}=\{-2;1{,}5;5\}$;
– l'équation $f(x)=-3$ n'a pas de solution car la courbe $\mathscr{C}_f$ n'a pas de point ayant -3 pour ordonnée ;
– les équations $f(x)=2$ et $f(x)=-1{,}5$ ont chacune deux solutions.

À savoir

Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$ c'est trouver les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exemple 6.11
Dans le repère ci-dessous, on a tracé les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-4;5]$.



Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$:
$\mathscr{S} = \{-2\,;\,2\}$

Chapitre 7

Droites dans un repère

7.1 Coefficient directeur. Équation de droite

7.1.1 Équation réduite d'une droite

Théorème 7.1
Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit d une droite du plan. On a deux cas possibles :

si d est parallèle à $(O; \vec{j})$**,** alors il existe un réel c tel que $M(x; y) \in d$ si et seulement si $x = c$;

si d n'est pas parallèle à $(O; \vec{j})$**,** alors il existe deux réels m et p tels que $M(x; y) \in d$ si et seulement si $y = mx + p$.

Démonstration :
Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts de la droite d. Soit $M(x; y)$ un point quelconque du plan.

$$\begin{array}{lcl} M \in d & \Longleftrightarrow & \text{les vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires.} \\ & \Longleftrightarrow & x_{\overrightarrow{AB}} y_{\overrightarrow{AM}} - x_{\overrightarrow{AM}} y_{\overrightarrow{AB}} = 0 \text{ (d'après le Théorème 4.1)} \\ & \Longleftrightarrow & (x_B - x_A)(y - y_A) - (x - x_A)(y_B - y_A) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & (x_B - x_A)y = (y_B - y_A)x + y_A x_B - y_A x_A - x_A y_B + x_A y_A \\ & \Longleftrightarrow & (x_B - x_A)y = (y_B - y_A)x + y_A x_B - x_A y_B \end{array}$$

On a alors deux possibilités :

soit $x_B - x_A = 0$ (c'est le cas si d est parallèle à $(O; \vec{j})$: tous les points de d ont la même abscisse). L'équation devient alors $(y_B - y_A)x = x_A y_B - x_B y_A$.
C'est à dire $(y_B - y_A)x = x_A y_B - x_A y_A$. Or A et B sont distincts et $x_A = x_B$ donc $y_B - y_A \neq 0$; d'où en divisant par $y_B - y_A$, on obtient alors : $x = \frac{x_A(y_B - y_A)}{y_B - y_A}$.
En posant $c = x_A$, on a alors $x = c$.

soit $x_B - x_A \neq 0$ (c'est le cas si d n'est pas parallèle à $(O; \vec{i}, \vec{j})$: deux points de d ne peuvent avoir la même abscisse). On divise alors par $(x_B - x_A)$ et l'équation devient : $y = \frac{(y_B - y_A)x + y_A x_B - x_A y_B}{x_B - x_A}$.
C'est à dire : $y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x + \frac{y_A x_B - x_A y_B}{x_B - x_A}$. On pose alors $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et $p = \frac{y_A x_B - x_A y_B}{x_B - x_A}$.
On a alors $y = mx + p$.

Définition 7.1
Dans les conditions du théorème 7.1 et avec les notations de la démonstration,

si d est parallèle à $(O; \vec{j})$**,** l'équation $x = c$ est appelée *équation réduite* de la droite d et on dit que le vecteur $\vec{j}$ est un vecteur *directeur* de d ;

si d n'est pas parallèle à $(O;\vec{j})$**,** l'équation $y = mx + p$ est appelée *équation réduite* de la droite d et on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur *directeur* de d. Le réel m est appelé *coefficient directeur* ou *pente* de d et le réel p *ordonnée à l'origine* de d.

Exemple 7.1
Soit $A(1;2)$, $B(-2;3)$ et $C(1;-3)$ trois points dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) puis de la droite (AC).

Soit $M(x;y)$ un point du plan. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(-3;1)$ et les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont $(x-1;y-2)$.

$$\begin{aligned}
M \in (AB) &\iff \text{A, B et M sont alignés}\\
&\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires}\\
&\iff -3(y-2)-1(x-1)=0 \text{ (Théorème 4.1)}\\
&\iff -3y+6=x-1\\
&\iff y=-\tfrac{1}{3}x+\tfrac{7}{3}
\end{aligned}$$

Ainsi l'équation réduite de (AB) est $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$.

De même pour la droite (AC) :

Soit $M(x;y)$ un point du plan. Les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ sont $(0;-5)$ et les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont $(x-1;y-2)$.

$$\begin{aligned}
M \in (AB) &\iff \text{A, C et M sont alignés}\\
&\iff \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires}\\
&\iff 0\times(y-2)-(-5)\times(x-1)=0 \text{ (Théorème 4.1)}\\
&\iff 5x-5=0\\
&\iff x=1
\end{aligned}$$

Ainsi l'équation réduite de (AC) est $x=1$.

Théorème 7.2 (Réciproque)
Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan. Soit m, p et c trois réels quelconques,

– l'ensemble des points $M(x;y)$ qui vérifient l'équation $y = mx + p$ est une droite coupant l'axe des ordonnées au point $P(0;p)$;
– l'ensemble des points $M(x;y)$ qui vérifient l'équation $x = c$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Démonstration :

– Soit $A(0,p)$ et $B(1,m+p)$. Les coordonnées de ces deux points vérifient l'équation $y = mx + p$.
Montrons que l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant cette équation sont sur la droite (AB) :
Soit $M(x;y)$ tel que $y = mx + p$. On a $\overrightarrow{AB}(1;m)$ et $\overrightarrow{AM}(x;y-p)$; c'est à dire $\overrightarrow{AM}(x;mx)$.
On a : $1\times mx - m\times x = mx - mx = 0$. En utilisant le théorème 4.1, on déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. Donc les points A, B et M sont alignés. Le point M appartient donc bien à une droite qui coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée p.
– Tous les points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $x = c$ ont la même abscisse. Ils sont donc alignés sur une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

7.1.2 Coefficient directeur

Propriété 7.1
Soit $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}; y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}; y_\mathrm{B})$ avec $x_\mathrm{A} \neq x_\mathrm{B}$. Alors le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$$m = \frac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}}$$

Démonstration :
On a $x_\mathrm{A} \neq x_\mathrm{B}$ donc l'équation réduite de la droite est du type $y = mx + p$. Les points A et B sont sur la droite donc leurs coordonnées vérifient l'équation de la droite. On a donc $y_\mathrm{A} = mx_\mathrm{A} + p$ et $y_\mathrm{B} = mx_\mathrm{B} + p$; en soustrayant ces deux égalités on obtient $y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A} = m(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})$ donc $m = \frac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}}$.
On peut même obtenir $p = y_\mathrm{A} - mx_\mathrm{A} = y_\mathrm{A} - \frac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}} \times x_\mathrm{A}$.

Exemple 7.2
L'algorithme ci-dessous détermine l'équation réduite d'une droite dans un repère dont on connaît deux points par leur coordonnées.

```
Entrées : Les coordonnées des points A et B;
début
    si x_A = x_B alors
        Afficher « l'équation réduite de (AB) est x = x_A » ;
    sinon
        m ← (y_B − y_A)/(x_B − x_A);
        p ← y_A − m × x_A;
        Afficher « l'équation réduite de (AB) est y = mx + p » ;
fin
```

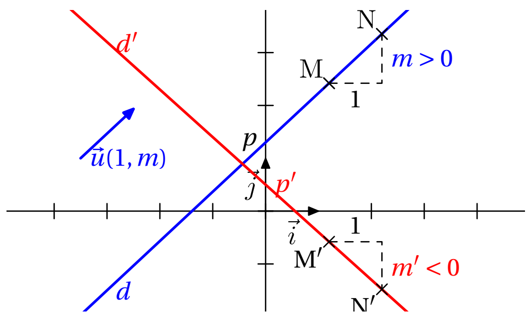
Algorithme 9 : Détermination de l'équation d'une droite

7.2 Droites parallèles. Fonction affine

Théorème 7.3 (Droites parallèles)
Soit deux droites d et d' d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ dans un repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. Les droites d et d' sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

$$d \,//\, d' \Longleftrightarrow m = m'$$

Interprétation graphique de m et p :
p est l'ordonnée du point d'intersection de d avec l'axe des ordonnées (yy').
m est la différence des ordonnées de deux points M et N de d tels que $x_\mathrm{N} = x_\mathrm{M} + 1$.
Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \vec{u}(1; m)$ est un vecteur directeur de d.



Propriété 7.2 (Lien avec les fonctions affines)
La représentation d'une fonction affine f définie par $f(x) = mx + p$ est la droite d d'équation réduite $y = mx + p$.

7.3 Interprétation d'un système

Définition 7.2
Une équation du premier degré [1] à deux inconnues x et y est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax+by=c$, où a, b et c sont trois réels [2].

Remarque 7.1
- si $b \neq 0$, une telle équation peut s'écrire $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$: c'est alors l'équation d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées ;
- si $b=0$ et $a \neq 0$, une telle équation peut s'écrire $x=\frac{c}{a}$: c'est alors l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Définition 7.3
Un système d'équations linéaires à deux inconnues x et y est un couple d'équations s'écrivant sous la forme : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$
Résoudre un tel système, c'est trouver tous les couples $(x;y)$ qui vérifient simultanément les deux équations du système.

Interprétation graphique :
On étudie le cas où a et b d'une part et a' et b' d'autre part ne sont pas simultanément nuls.
Dans ce cas, on peut associer à chacune des deux équations une droite [3] dans un même repère. Les solutions du système seront alors les coordonnées des points communs aux deux droites. Il existe donc trois cas possibles : les droites sont sécantes (un point commun), les droites sont parallèles strictement (pas de point commun) ou les droites sont confondues (une infinité de points communs).

Exemple 7.3
Résoudre graphiquement le système $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-2y=4 \end{cases}$

Propriété 7.3
Les droites associées aux deux équations d'un système du type $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ sont parallèles si et seulement si $a'b-ab'=0$.

Conséquence :
Le système $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ admet une unique solution si et seulement si $a'b-ab' \neq 0$.

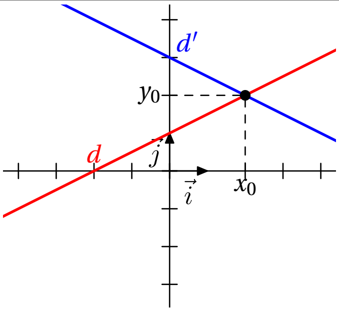
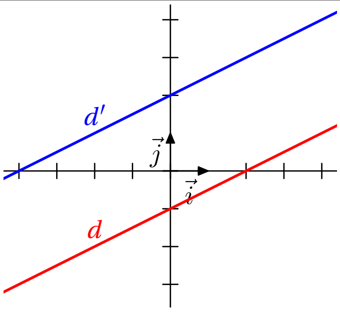
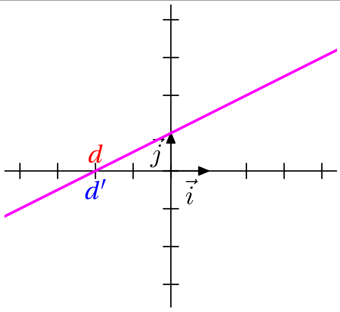
Démonstration :
- si $b \neq 0$ et $b' \neq 0$ les droites d et d' ont pour coefficients directeurs respectifs $-\frac{a}{b}$ et $-\frac{a'}{b'}$. Ainsi d et d' sont parallèles si et seulement si $-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$ qui s'écrit aussi $ab'-a'b=0$;
- si $b=0$ alors d est une droite parallèle à $(\mathrm{O}y)$. Donc les droites d et d' sont parallèles si et seulement si b' est aussi nul. Dans ce cas on a $ab'-a'b=0$. Et réciproquement si $ab'-a'b=0$ alors $ab'=0$ (car $b=0$), or $a \neq 0$, donc $b'=0$;

1. On dit aussi « linéaire ».
2. Le cas où $a=b=0$ n'a pas vraiment d'intérêt...
3. Droites qu'on notera respectivement d et d'.

Donc les droites d et d' sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

– si $b' = 0$, même démonstration que le point précédent.

Le tableau suivant regroupe les cas où b et b' sont non nuls :

Si $ab' - a'b \neq 0$	Si $ab' - a'b = 0$	
	Ordonnées à l'origine distinctes : $\frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'}$	Même ordonnée à l'origine : $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$
Les droites sont sécantes	Les droites sont strictement parallèles	Les droites sont confondues
		
Une unique solution $(x_0 ; y_0)$	Pas de solution	Tous les couples de coordonnées des points des droites sont solution.

« *Un statisticien est une personne qui peut avoir la tête dans un four et les pieds pris dans la glace et dire qu'en moyenne il se sent bien.* »
BENJAMIN DERECA

Chapitre 8

Statistiques : épisode 1

L'objet du chapitre est de donner des outils permettant d'exploiter de façon pertinente une série de données recueillies préalablement. L'utilisation des statistiques est présente dans beaucoup de domaines [1] ; elles servent notamment à constater, comparer ou prévoir certaines situations.
Dans un deuxième chapitre nous utiliserons aussi la calculatrice et le tableur pour simuler des expériences aléatoires telles que des jeux de dés, de pile ou face, de loto, ...

8.1 Vocabulaire des statistiques

La *population* est constituée des individus sur lesquels porte l'étude statistique. Les individus pouvant être des êtres humains, animaux, objets, villes, ... Le *caractère* est la propriété étudié chez ces individus ; par exemple la taille, l'âge, la couleur, le nombre d'habitants,.... Le nombre d'individus dans la population est appelé *l'effectif total*, souvent noté N.
Les caractères étudiés peuvent être *quantitatifs* (nombre de cigarettes par jour [2], âge, distance du lieu de travail, ...) ou *qualitatifs* (couleur des cheveux, marque de voiture, numéro du département, ...).
Lorsque le caractère étudié est quantitatif, il peut être *discret* (c'est à dire prenant un nombre de valeurs qu'on peut compter, par exemple le nombre de cigarettes) ou *continu* (c'est à dire pouvant prendre toute valeur d'un intervalle, par exemple la distance du lieu de travail). Dans les deux cas, on peut regrouper les données par *classes* : on considère que tous les individus ayant une valeur du caractère appartenant à un intervalle font partie d'un même « groupe » : la classe.
À chaque valeur (ou classe) du caractère, on associe un *effectif* n : c'est le nombre d'individus ayant pour caractère cette valeur ou une valeur dans l'intervalle qui définit la classe.
Une *série statistique* est la donnée (souvent sous forme de tableaux) des différentes classes de la population et de leurs effectifs correspondants.
À chaque valeur (ou classe) du caractère, on peut aussi associer une *fréquence* f qui est le quotient de l'effectif de la valeur (ou de la classe) par l'effectif total : $f = \frac{n}{N}$; la fréquence est un nombre compris entre 0 et 1. La somme des fréquences est toujours égale à 1. On exprime parfois les fréquences en pourcentages.
La suite de nombres constituée des fréquences des valeurs d'un caractère d'une série statistique est appelée *distribution des fréquences* de la série.
Pour étudier une série statistiques on peut la représenter grâce à différents types de graphiques (nous verrons ça en séance de modules) mais on peut aussi la « résumer » par certaines valeurs numériques qu'on appelle *paramètres* de la série. Nous distinguerons deux types de parmètres : les paramètres de *tendance centrale* et les paramètres de *dispersion*.

1. Même et surtout non-mathématiques
2. Fumer nuit à la santé.

8.2 Paramètres de tendance centrale

8.2.1 Le mode

Définition 8.1
Le mode ou valeur modale est la valeur de la variable statistique qui est le plus souvent observée. C'est à dire la valeur du caractère ou la classe qui a le plus grand effectif.

8.2.2 Moyenne

Définition 8.2
On considère une série statistique à caractère quantitatif prenant p valeurs notées $x_1, x_2, \ldots, x_p$; chaque valeur x_i apparaissant n_i fois dans la série. Ainsi la population totale a un effectif noté $\mathrm{N} = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$. La moyenne de cette série est le nombre $\overline{x}$ défini par :

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_p x_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{\mathrm{N}}$$

Cette moyenne est appelée *moyenne pondérée* par les effectifs.

Exemple 8.1
On donne la série de notes obtenues par les élèves d'une classe à un contrôle de maths :

Note	5	7	10	11	13	15	16	19
Effectif	1	6	7	4	6	7	1	3

La moyenne de la classe est :

$$\overline{x} = \frac{1 \times 5 + 6 \times 7 + 7 \times 10 + 4 \times 11 + 6 \times 13 + 7 \times 15 + 1 \times 16 + 3 \times 19}{35} \approx 11{,}9$$

Chaque note est comptée autant de fois qu'elle apparaît dans les copies des élèves. L'effectif de la note est aussi appelé poids ou coefficient.

Propriété 8.1
On considère une série statistique prenant p valeurs $x_1, \ldots, x_p$. Si la distribution des fréquences associée à cette série est $(f_1 ; f_2 ; \ldots ; f_p)$, alors, la moyenne de cette série est :

$$\overline{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_p x_p = \sum_{i=1}^{p} f_i x_i$$

8.2.3 Médiane

Définition 8.3
Dans une série statistique de type quantitatif, la *médiane* est la valeur du caractère qui sépare la population en deux groupes de même effectif : ceux dont la valeur du caractère est inférieure à la médiane et ceux dont la valeur du caractère est supérieure à la médiane.

Remarque 8.1 (Méthode de détermination de la médiane)
Deux cas sont possibles :

– s'il y a un nombre impair d'observations : $\mathrm{N} = 2k+1$, où $k \in \mathbf{N}$, alors la médiane est la $k+1^{\text{e}}$ valeur du caractère (les valeurs étant rangées par ordre croissant).
– s'il y a un nombre pair d'observations : $\mathrm{N} = 2k$, où $k \in \mathbf{N}$, alors on *convient*[3] de prendre comme médiane la moyenne des k^{e} et $k+1^{\text{e}}$ valeurs du caractère (les valeurs étant rangées par ordre croissant).

Exemple 8.2
On donne les séries statistiques suivantes :

valeur	3	4	6	7
effectif	1	3	2	1

et

valeur	3	4	6	7
effectif	2	3	1	4

Pour le premier tableau, on a un effectif total de 7. La médiane est donc la 4$^{\text{e}}$ valeur lorsqu'elles sont rangées par ordre croissant :
3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 6 ; 6 ; 7. La médiane vaut 4.
Pour le deuxième tableau, on a un effectif total de 10. La médiane est donc la moyenne de la 5$^{\text{e}}$ et de la 6$^{\text{e}}$ valeurs lorsqu'elles sont rangées par ordre croissant :
3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 6 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7. La médiane vaut $\frac{4+6}{2} = 5$.

8.3 Paramètres de dispersion

Les paramètres de positions sont insuffisants pour étudier correctement une série statistique : deux séries ayant les mêmes paramètres peuvent être très différentes.

Exemple 8.3
On donne les résultats de deux groupes d'élèves à un même contrôle :

Groupe 1 :

note x	3	5	6	7	8	9	10	13	14	18	20
effectif	1	1	2	2	4	2	1	2	3	1	1

Groupe 2 :

note y	1	2	3	4	13	14	18	19	20
effectif	3	2	2	4	1	2	4	2	2

Ces deux séries ont pour moyenne $\overline{x} = \overline{y} = 10$ et pour médiane $\mathrm{Med}_x = \mathrm{Med}_y = 8{,}5$.

8.3.1 Étendue

Définition 8.4
L'étendue d'une série statistique de type quantitatif est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur du caractère étudié.

Exemple 8.4
Dans l'exemple 8.3, l'étendue du groupe 1 vaut $20-3 = 17$, et l'étendue du groupe 2 vaut $20-1 = 19$.

Remarque 8.2
Le mode, la moyenne et la médiane sont des paramètres de *position* ou *mesure de tendance centrale* : ils permettent de « résumer » la série par un nombre auquel on peut comparer les valeurs de la série.

3. Il s'agit d'un *choix* : en fait, on pourrait prendre comme médiane n'importe quelle valeur comprise entre la k^{e} et la $k+1^{\text{e}}$ valeurs.

L'étendue est un paramètre de *dispersion* qui permet de mesurer si les valeurs de la série s'écartent beaucoup des paramètres de position [4].

8.3.2 Les quartiles

Définition 8.5
Soit x une série statistique avec $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.
Les *quartiles* (au nombre de 3 : Q_1, Q_2 et Q_3) partagent la population classée par ordre croissant de valeur du caractère en quatre sous ensembles, en respectant les règles ci-dessous :
- Q_1 est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $n/4$.
- Q_2 est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $n/2$.
- Q_3 est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $3n/4$.

Définition 8.6
L'*écart interquartile* est la différence entre le 3^{e} et le 1er quartile. Au moins 50% des observations ont une valeur du caractère comprise entre Q_1 et Q_3. L'*intervalle interquartile* est l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$.

Exemple 8.5
Calculer les premiers et troisièmes quartiles de chacune des séries de l'exemple 8.3 :

série x : on a un effectif total $n = 20$
donc $n/4 = 5$ et donc Q_1 est la 5^{e} valeur de la série : $Q_1 = x_5 = 7$.
de même $3n/4 = 15$ donc Q_3 est la 15^{e} valeur de la série : $Q_3 = x_{15} = 13$.

série y : on a un effectif total $n = 22$
donc $n/4 = 5{,}5$, et donc Q_1 est la 6^{e} valeur de la série : $Q_1 = y_6 = 3$
de même, $3n/4 = 16{,}5$ donc Q_3 est la 17^{e} valeur de la série : $Q_3 = y_{17} = 18$

Remarque 8.3
De la même façon que les quartiles partagent la population en quatre groupes d'effectifs « proches », on peut aussi définir les *déciles* qui partagent la population en dix groupes d'effectifs comparables.
En fait, on utilise surtout les premier et neuvième déciles qui sont définis comme ceci :
- le premier décile D_1 est la valeur x_i de la série dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{n}{10}$ lorsqu'elles sont rangées par ordre croissant ;
- le neuvième décile D_9 est la valeur x_i de la série dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{9n}{10}$ lorsqu'elles sont rangées par ordre croissant.

Exemple 8.6
En reprenant les données de l'exemple 8.3, on a :

série x : $n = 20$ donc $n/10 = 2$; $9n/10 = 18$ donc $D_1 = x_2 = 5$ et $D_9 = x_{18} = 14$;

série y $n = 22$ donc $n/10 = 2{,}2$; $9n/10 = 19{,}8$ donc $D_1 = y_3 = 1$ et $D_9 = y_{20} = 19$.

> « *Un statisticien est une personne qui peut avoir la tête dans un four et les pieds pris dans la glace et dire qu'en moyenne il se sent bien.* »
> BENJAMIN DERECA

4. D'autres paramètres de dispersion, plus pertinent, existent mais vous les verrez plus tard. . . .

Chapitre 9

Fonctions usuelles

9.1 La fonction carré

9.1.1 La fonction carré

Définition 9.1
La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ qui, à tout réel associe son carré.

$$f : x \longmapsto x^2$$

Exemple 9.1
Soit f la fonction carré.
Alors on a $f(3) = 3^2 = 9$, $f(0) = 0$, $f(-2{,}5) = 6{,}25$, ...

Propriété 9.1
La fonction carré est croissante sur $\mathbf{R}^+$ et décroissante sur $\mathbf{R}^-$. Cela signifie que :
– deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés ;
– deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leurs carrés.

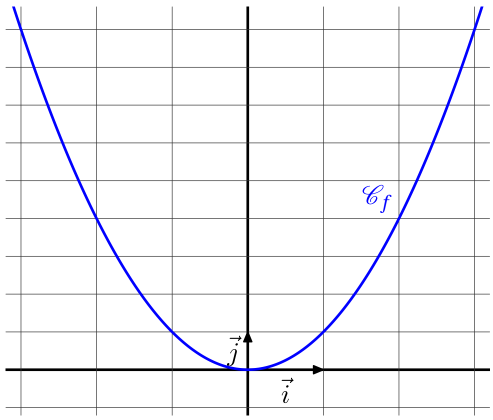
Démonstration :
– Il s'agit de démontrer que si a et b sont deux réels positifs tels que $a < b$ alors $a^2 < b^2$.
  Si $a = 0$ alors $a^2 = 0$ et $b^2 > 0$ donc a et b sont dans le même ordre que a^2 et b^2.
  Si $a \neq 0$, alors a est strictement positif. Or $a < b$ donc en multipliant les deux membres de cette inégalité par a, on obtient $a^2 < ab$.
  De même, $b > 0$ donc en multipliant les deux membres de $a < b$ par b on obtient : $ab < b^2$.
  Ainsi $a^2 < ab < b^2$ donc a et b sont dans le même ordre que leurs carrés.
– Il s'agit de démontrer que si a et b sont deux réels négatifs tels que $a < b$ alors $a^2 > b^2$.
  Si $b = 0$ alors $b^2 = 0$ et $a^2 > 0$ donc a et b sont dans l'ordre inverse de leurs carrés a^2 et b^2.
  Si $b \neq 0$, alors b est strictement négatif. Or $a < b$ donc en multipliant les deux membres de cette inégalité par b, on obtient $ab > b^2$. (On change le sens d'une inégalité lorsqu'on multiplie les deux membres par un nombre strictement négatif)
  De même, $a < 0$ donc en multipliant les deux membres de $a < b$ par a on obtient : $a^2 > ab$.
  Ainsi $a^2 > ab > b^2$ donc a et b sont dans l'ordre inverse de leurs carrés.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f : x \mapsto x^2$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Le minimum de la fonction carré est 0 ; il est atteint pour $x = 0$.
La courbe représentative de la fonction carré tracée ci-contre est une *parabole* de sommet O et d'axe $(O; \vec{j})$.

Courbe représentative :



9.1.2 Fonction définie à l'aide de la fonction carré

Exemple 9.2
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$.

1. Montrer que $f(x) = 2(x-3)^2 - 5$.
2. Déterminer les variations de f sur $]-\infty; 3]$ puis sur $[3; +\infty[$.
3. Dresser le tableau de variations de f pour $x \in [-1; 6]$.
4. Dresser un tableau de valeurs de la fonction f puis tracer sa courbe représentative dans un repère.

1. On a : $2(x-3)^2 - 5 = 2(x^2 - 6x + 9) - 5 = 2x^2 - 12x + 13 = f(x)$.
2. Soit a et b deux réels tels que $a < b \leq 3$.

On a :	$a < b \leq 3$	On soustrait 3 :
Donc :	$a - 3 < b - 3 \leq 0$	La fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbf{R}^-$
Donc :	$(a-3)^2 > (b-3)^2$	On multiplie par 2 $(2 > 0)$
Donc :	$2(a-3)^2 > 2(b-3)^2$	On soustrait 5 :
Donc :	$2(a-3)^2 - 5 > 2(b-3)^2 - 5$	
D'où :	$f(a) > f(b)$	

Donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty; 3]$.
De même sur $[3; +\infty[$, soit a et b tels que $3 \leq a < b$:

On a :	$3 \leq a < b$	On soustrait 3 :
Donc :	$0 \leq a - 3 < b - 3$	La fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbf{R}^+$
Donc :	$(a-3)^2 < (b-3)^2$	On multiplie par 2 $(2 > 0)$
Donc :	$2(a-3)^2 < 2(b-3)^2$	On soustrait 5 :
Donc :	$2(a-3)^2 - 5 < 2(b-3)^2 - 5$	
D'où :	$f(a) < f(b)$	

Donc la fonction f est croissante sur $[3; +\infty[$.

3. On en déduit le tableau de variations de f sur $[-1; 6]$:

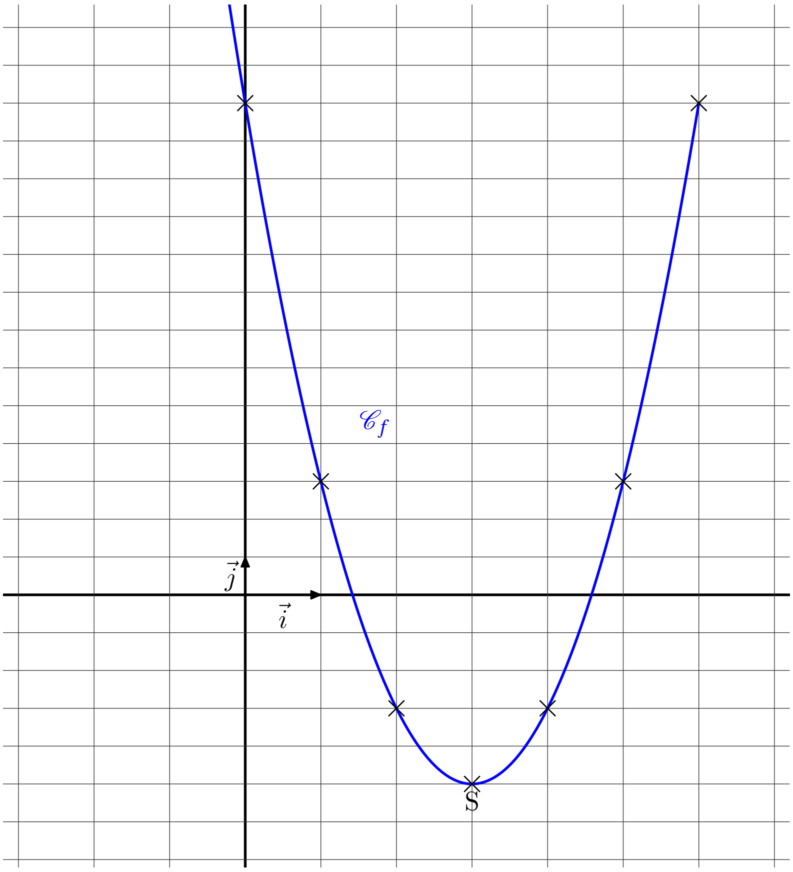
x	-1		3		6
f	27	$\searrow$	-5	$\nearrow$	13

$f(-1) = 2 \times (-1)^2 - 12 \times (-1) + 13 = 27$ et $f(6) = 2 \times 6^2 - 12 \times 6 + 13 = 13$.

4. On dresse un tableau de valeurs :

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	27	13	3	-3	-5	-3	3	13

On trace alors la courbe représentative de f dans le repère ci-dessous :



Cette courbe est une parabole de sommet $S(3;-5)$ et d'axe $(S;\vec{j})$.

La fonction f admet pour minimum -5 qui est atteint pour $x=3$.

Définition 9.2
Une fonction f dont l'expression algébrique peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2+bx+c$ où $a \neq 0$ est appelée *fonction polynome de degré 2.*

Propriété 9.2
Soit f un polynôme de degré 2 défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors il existe deux réels α et β tels que $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
α est la valeur de x pour laquelle $f(x)$ atteint son extremum qui est β :
– si $a > 0$, alors β est un minimum ;
– si $a < 0$, alors β est un maximum.
L'expression $a(x-\alpha)^2+\beta$ est appelée *forme canonique* du polynome f.

9.1.3 Équations

Propriété 9.3 (Équations $x^2 = k$)
Soit k un réel quelconque. Alors :
– si $k > 0$, alors l'équation $x^2 = k$ admet deux solutions : $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$;

– si $k=0$, alors l'équation $x^2=k$ admet une unique solution : 0 ;
– si $k<0$, alors l'équation $x^2=k$ n'a pas de solution.

Exemple 9.3
Résoudre l'équation $(2x-3)^2=9$.

Cette équation est de la forme $X^2=k$ avec $X=2x-3$ et $k=9>0$.

X peut donc prendre deux valeurs : $\sqrt{9}=3$ et $-\sqrt{9}=-3$.

On résout donc : $2x-3=3$ et $2x-3=-3$. On obtient alors deux solutions : $x=3$ et $x=0$.

Ainsi, $\mathscr{S}=\{0\,;3\}$.

Remarque 9.1
Pour être sûr de ne pas oublier de solution, mieux vaut résoudre l'équation précédente à l'aide d'une factorisation puis en utilisant la propriété 6.2 de la page 36 de ce cours :

$$\begin{aligned}(2x-3)^2=9 &\iff (2x-3)^2-3^2=0\\ &\iff (2x-3+3)(2x-3-3)=0\\ &\iff 2x(2x-6)=0\\ &\iff 2x=0 \text{ ou } 2x=6\\ &\iff x=0 \text{ ou } x=3\end{aligned}$$

9.2 La fonction inverse

9.2.1 La fonction inverse

Définition 9.3
La fonction inverse est la fonction qui, à tout réel non nul associe son inverse.

$$\text{Pour } x\neq 0,\ f(x)=\frac{1}{x}$$

Propriété 9.4
La fonction inverse est décroissante sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $\mathbf{R}_+^*$.

Démonstration :

Soit a et b deux réels strictement négatifs tels que $a<b$. Étudions le signe de $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$:
$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b}{ab}-\frac{a}{ab}=\frac{b-a}{ab}$. Or a et b sont négatifs donc $ab>0$. De plus $a<b$ donc $b-a>0$. Donc $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ est égal au quotient de deux réels positifs ; c'est donc un réel positif. Donc $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$; ainsi, $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$. Les nombres a et b et leurs images sont donc rangés dans l'ordre inverse : la fonction inverse est décroissante sur $\mathbf{R}_-^*$.

On démontrerait de même que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

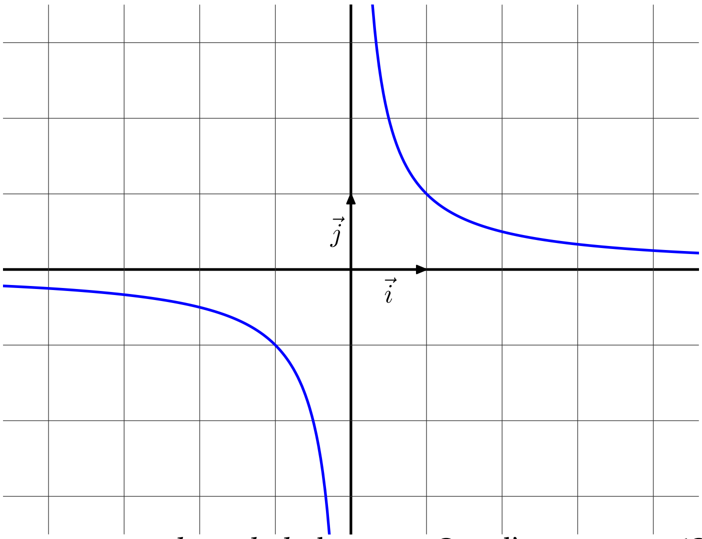
Remarque 9.2
Attention ! La fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbf{R}^*$.

En effet, on a : $-2<2$ et $\frac{1}{-2}<\frac{1}{2}$: les images de -2 et 2 sont rangés dans le même ordre que -2 et 2.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	0

Courbe représentative :



La courbe représentative de la fonction inverse est une *hyperbole* de centre O et d'asymptotes $(\mathrm{O}x)$ et $(\mathrm{O}y)$.

9.2.2 Expressions rationnelles

Exemple 9.4
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que pour $x \in \mathscr{D}_f$, on a $f(x) = 3 + \frac{1}{x-2}$.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.
4. Étudier les variations de f sur $]-\infty;2[$ puis sur $]2;+\infty[$.
5. En se limitant à l'ensemble $[-3;2[\cup]2;7]$, dresser le tableau de variations de f, puis un tableau de valeurs et enfin la courbe représentative de f dans un repère.

1. $f(x)$ existe pour $x-2 \neq 0$ soit $x \neq 2$: $x = 2$ est une valeur interdite pour f.
   Donc $\mathscr{D}_f =]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.
2. On a : $3 + \frac{1}{x-2} = \frac{3(x-2)}{x-2} + \frac{1}{x-2} = \frac{3x-6+1}{x-2} = \frac{3x-5}{x-2} = f(x)$.
3. Le point d'intersection A de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées a pour abscisse $x_{\mathrm{A}} = 0$ et donc pour ordonnée $y_{\mathrm{A}} = f(0) = \frac{5}{2}$. Donc $\mathrm{A}\left(0;\frac{5}{2}\right)$.
   Les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses ont pour ordonnée 0. On résout donc l'équation $f(x) = 0$. Un quotient est nul si et seulement si son dénominateur n'est pas nul et son numérateur est nul. Donc pour $x \neq 2$, $f(x) = 0$ si et seulement si $3x-5 = 0$ soit $x = \frac{5}{3}$.
   Donc $\mathscr{C}_f$ coupe $(\mathrm{O}x)$ en un seul point : $\mathrm{B}\left(\frac{5}{3};0\right)$.
4. Pour étudier les variations de f, on utilise l'expression de $f(x)$ trouvée à la question 2.
   Soit a et b deux réels tels que $a < b < 2$.

On a :	$a < b < 2$	On soustrait 2 :
Donc :	$a-2 < b-2 < 0$	La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbf{R}_-^*$
Donc :	$\frac{1}{a-2} > \frac{1}{b-2}$	On ajoute 3 :
Donc :	$3 + \frac{1}{a-2} > 3 + \frac{1}{b-2}$	
D'où :	$f(a) > f(b)$	

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$.

De même, soit a et b deux réels tels que $2 < a < b$.

On a :	$2 < a < b$	On soustrait 2 :
Donc :	$0 < a-2 < b-2$	La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$
Donc :	$\frac{1}{a-2} > \frac{1}{b-2}$	On ajoute 3 :
Donc :	$3 + \frac{1}{a-2} > 3 + \frac{1}{b-2}$	
D'où :	$f(a) > f(b)$	

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $]2; +\infty[$.

5. On en déduit le tableau de variations :

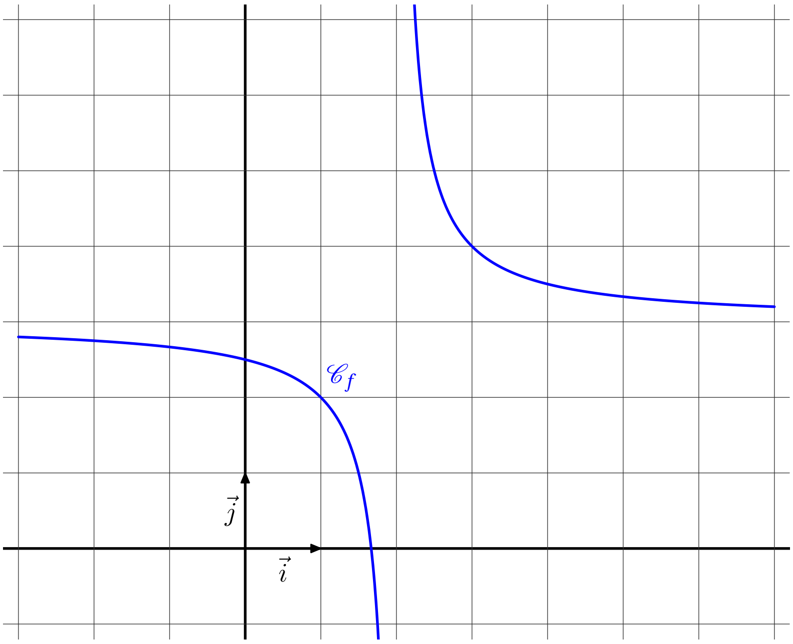
Tableau de variations :

x	-3		2		7
f	2,8	$\searrow$	||	$\searrow$	3,2

Tableau de valeurs :

x	-3	0	1	3	4	7
$f(x)$	2,8	$\frac{5}{2}$	2	4	$\frac{7}{2}$	3,2

Courbe représentative :



« Si vous touchez aux mathématiques, vous ne devez être ni pressés, ni cupides, fussiez-vous roi ou reine »
EUCLIDE D'ALEXANDRIE

Chapitre 10

Probabilités

Le but des probabilités est d'essayer de rationaliser le hasard : quelles sont les chances d'obtenir un résultat suite à une expérience aléatoire ?
Quelles chances ai-je d'obtenir « pile » en lançant une pièce de monnaie ? Quelles chances ai-je d'obtenir « 6 » en lançant un dé ? Quelles chances ai-je de valider la grille gagnante du loto ?

10.1 Définitions

L'objet de l'étude d'un phénomène aléatoire est appelé *expérience aléatoire*. Au cours d'une expérience aléatoire, les résultats possibles sont appelés les *éventualités* (notées généralement e_i). L'ensemble des n éventualités est appelé *l'univers* de l'expérience aléatoire. On le note généralement Ω (omega majuscule dans l'alphabet grec). Un *événement* est un ensemble constitué d'éventualités. Un événement ne comportant qu'une seule éventualité est appelé *événement élémentaire*.

Exemple 10.1
On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6.
- les éventualités sont $e_1 = 1$, $e_2 = 2$, $e_3 = 3$, $e_4 = 4$, $e_5 = 5$, $e_6 = 6$;
- l'univers est donc $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$;
- on note A l'événement « obtenir un chiffre pair ». Alors $A = \{2;4;6\}$;
- on note B l'événement « obtenir un six ». Alors $B = \{6\}$: c'est un événement élémentaire.

10.2 Distribution de fréquences. Loi de probabilité

10.2.1 Distribution de fréquences

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire en notant les résultats obtenus, on peut compter le nombre de fois où chaque événement élémentaire se produit, et ensuite calculer sa fréquence d'apparition. On obtient alors pour chaque éventualité e_i une fréquence $f_i = \frac{n_i}{N}$, où n_i est le nombre d'apparitions de e_i et N le nombre total d'expériences.
On dit alors que la *distribution de fréquences* associée à ces N expériences aléatoires est la suite $(f_1;\ldots;f_p)$.

Exemple 10.2
On lance cent fois de suite une fléchette sur une cible ayant cinq zones : noire, rouge, jaune, bleue et verte. Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau ci-après :

zone touchée	noire	rouge	jaune	bleue	verte
nombre de touches	5	15	20	35	25
fréquence	0,05	0,15	0,20	0,35	0,25

La distribution de fréquences associée à ces cent lancers de fléchettes est donc :

(0,05; 0,15; 0,20; 0,35; 0,25)

Propriété 10.1
$(f_1;\ldots;f_p)$ est une distribution de fréquences associée à N expériences aléatoires identiques. Alors :
– on a : $f_1+\cdots+f_p=1$;
– si A est un événement, alors la fréquence de A, $f(\mathrm{A})$ est la somme des fréquences de toutes les éventualités constituant A.

10.2.2 Loi de probabilité

Exemple 10.3
Dans une urne on a placé huit boules numérotées de 1 à 8. On en tire une au hasard. Si les boules sont indiscernables au toucher, on a autant de chances d'en tirer une plutôt qu'une autre. On dit que la probabilité d'obtenir chaque boule est égale à $\frac{1}{8}$. On écrit :

$$p(1)=p(2)=\cdots=p(8)=\frac{1}{8}$$

On dit qu'on a défini une loi de probabilité sur l'ensemble $\Omega=\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Plus généralement, on a la définition suivante :

Définition 10.1
Soit Ω un univers lié à une expérience aléatoire ayant n éventualités e_1, e_2,..., e_n.
Si à chaque événement élémentaire $\{e_i\}$ on associe un nombre $p_i\in[0;1]$ tel que :

$$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$$

Alors on définit une loi de probabilité sur l'univers Ω.
Chaque p_i est appelé *probabilité* de l'événement $\{e_i\}$.
La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des éventualités composant A.

Conséquences
– Ω est l'événement *certain* : $p(\Omega)=1$;
– $\emptyset$ est l'événement *impossible* : $p(\emptyset)=0$.

Exemple 10.4
En reprenant l'énoncé de l'exemple 10.3, on note A l'événement « obtenir un chiffre strictement supérieur à 5. On a alors $\mathrm{A}=\{6;7;8\}$, et donc $p(\mathrm{A})=\frac{3}{8}$.

10.2.3 Loi des grands nombres

Pour une expérience aléatoire donnée ayant une loi de probabilité P, la distribution de fréquences obtenue sur un nombre d'expériences est proche de la loi de probabilité lorsque le nombre d'expériences est « très grand ».

10.2.4 Équiprobabilité

Les n événements élémentaires d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire sont dits *équiprobables* si la probabilité de chacun d'eux est $\frac{1}{n}$.
Dans ce cas la probabilité d'un événement A est :

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de }\Omega} = \frac{\mathrm{Card}(\mathrm{A})}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

Remarque 10.1
Dans un exercice, pour signifier qu'on est dans une situation d'équiprobabilité on a généralement dans l'énoncé une expression du type :
- on lance un dé *non pipé*... ;
- on tire dans un jeu de cartes *non truqué*... ;
- dans une urne, il y a des boules *indiscernables au toucher*... ;
- on rencontre *au hasard* une personne parmi... ;
- ...

10.3 Quelques exemples de référence

Dans cette partie, nous allons étudier quelques exemples d'exercices « classiques » qu'il faut avoir en mémoire pour bien apréhender un problème de probabilité. D'autres situations sont bien sûr possibles et cette liste d'exemples n'est pas exhaustive...

Exemple 10.5 (le dé équilibré)
On lance un dé équilibré à six faces. On considère l'événement A : « obtenir un chiffre pair » et l'événement B : « obtenir un diviseur de six ». Calculer la probabilité de chacun de ces deux événements.
Le dé est équilibré donc on est dans une situation d'équiprobabilité. On a donc pour $1 \leq i \leq 6$, $p(i) = \frac{1}{6}$.
On a : $\mathrm{A} = \{2; 4; 6\}$ et $\mathrm{B} = \{1; 2; 3; 6\}$. Donc $p(\mathrm{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, et $p(\mathrm{B}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Exemple 10.6 (les boules de couleurs)
Dans une urne on place dix boules de couleurs numérotées. Les boules sont indiscernables au toucher et sont réparties comme suit :
- quatre boules rouges numérotées 1, 2, 3 et 4 ;
- trois boules blanches numérotées 1, 2 et 3 ;
- deux boules vertes numérotées 1 et 2 ;
- une boule jaune numérotée 1.

On tire au hasard une boule de l'urne. Calculer les probabilités des événements suivants :
- U : « obtenir une boule numérotée 1 » ;
- B : « obtenir une boule blanche » ;
- A : « obtenir un chiffre pair sur une boule rouge » ;
- I : « obtenir un chiffre impair ».

Les boules sont indiscernables au toucher et le tirage se fait au hasard, on est donc dans une situation d'équiprobabilité : chaque boule a une probabilité $p = \frac{1}{10}$ d'être tirée. En notant chaque éventualité par l'initiale de la couleur suivie du chiffre de la boule, on a :
- $\mathrm{U} = \{\mathrm{R}1; \mathrm{B}1; \mathrm{V}1; \mathrm{J}1\}$, donc $p(\mathrm{U}) = \frac{4}{10} = 0{,}4$;
- $\mathrm{B} = \{\mathrm{B}1; \mathrm{B}2; \mathrm{B}3\}$, donc $p(\mathrm{B}) = \frac{3}{10} = 0{,}3$;

– $A = \{R2; R4\}$, donc $p(A) = \frac{2}{10} = 0{,}2$;
– $I = \{R1; R3; B1; B3; V1; J1\}$, donc $p(I) = \frac{6}{10} = 0{,}6$.

Exemple 10.7 (le jeu de cartes)
On choisit une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes non truqué. On appelle « figure » les rois, dames et valets. Calculer les probabilités des événements suivants :
– A : « obtenir une figure » ;
– B : « obtenir un pique » ;
– C : « obtenir un as ».
Le jeu de cartes n'est pas truqué et le choix se fait au hasard, on est donc dans une situation d'équiprobabilité : chaque carte a une probabilité $p = \frac{1}{52}$ d'être choisie.
– Dans le jeu il y a $4 \times 3 = 12$ figures. Donc $p(A) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$.
– Dans le jeu il y a 13 piques. Donc $p(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.
– Dans le jeu, il y a 4 as. Donc $p(C) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

Exemple 10.8 (rencontre)
Dans une classe, 20 % des élèves ont 16 ans, 35 % ont 17 ans, 30 % ont 18 ans et 15 % ont 19 ans. On rencontre au hasard un élève de cette classe. Calculer la probabilité qu'il ait « au moins 17 ans ». Même question pour « strictement plus de 17 ans ».
– On note A l'événement l'élève a au moins 17 ans. $p(A) = 35\% + 30\% + 15\% = 80\%$.
– On note B l'événement l'élève a strictement plus de 17 ans. $p(B) = 30\% + 15\% = 45\%$.

Exemple 10.9 (non-équiprobabilité)
Un dé est pipé de sorte que les faces 1, 2, 3, 4 et 5 aient les probabilités suivantes d'apparaître :

$$p(1) = p(2) = p(3) = 0{,}1;\ p(4) = p(5) = 0{,}2;$$

1. Calculer $p(6)$.
2. Calculer $p(A)$ et $p(B)$ où A et B sont les événements définis dans l'exemple 10.5.

1. La somme de toutes les probabilités doit être égale à 1, donc :

$$p(6) = 1 - (p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5)) = 0,3$$

2. $p(A) = p(2) + p(4) + p(6) = 0{,}6$ et $p(B) = p(1) + p(2) + p(3) + p(6) = 0{,}6$.

10.4 Modélisation(s)

Lorsqu'on est face à un problème de probabilité, on peut effectuer une simulation de l'expérience aléatoire (nous verrons ça un peu plus tard dans l'année) et en répetant cette simulation un grand nombre de fois on obtient une distribution de fréquences proche de la loi de probabilité (voir la partie 10.2.3). On peut aussi chercher les probabilités théoriques grâce à un raisonnement. Dans les deux cas on est amené à *modéliser* l'expérience aléatoire c'est-à-dire à associer à cette expérience un ensemble et une loi de probabilité sur cet ensemble.

Exemple 10.10
On lance deux dés à six faces non truqués et on note la somme des chiffres obtenus sur la face supérieure de chacun d'eux. On peut modéliser cette expérience de deux façons différentes (au moins) :

- les sommes possibles sont les entiers de 2 à 12, il y a donc 11 possibilités et les dés sont équilibrés il y a donc équiprobabilité ;
- on complète un tableau à double entrée comme ci-dessous :

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

  On constate qu'il y a 36 « combinaisons » possibles et que certaines sommes apparaîssent plus souvent que d'autres. On obtient la loi de probabilité suivante :

somme	2	3	4	5	6	7	8	9	11	11	12
probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Quelle est donc la bonne modélisation [1] ?

10.5 Intersections. Réunions

10.5.1 Événement. Événement contraire

Définition 10.2
Soit A un événement d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire. On appelle *événement contraire* de A et on note $\overline{\mathrm{A}}$ l'événement constitué de toutes les éventualités de Ω n'étant pas dans A.

Exemple 10.11
Dans le cas d'un jet de dé à six faces, les événements contraires des événements définis dans l'exemple 10.5 sont : $\overline{\mathrm{A}}$: « obtenir un chiffre impair » et $\overline{\mathrm{B}}$: « obtenir un 4 ou un 5 ».

Propriété 10.2
Soit A un événement d'un univers Ω de probabilité $p(\mathrm{A})$. Alors l'événement $\overline{\mathrm{A}}$ a pour probabilité $1-p(\mathrm{A})$.

10.5.2 Intersection. Réunion

Définition 10.3
Soit Ω un univers lié à une expérience aléatoire et P une loi de probabilité sur Ω. Soit A et B deux événements de Ω. Alors :

- l'événement constitué des éventualités appartenant à A *et* à B est noté $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$. (on lit « A inter B » ou « A et B ») ;
- l'événement constitué des éventualités appartenant à A *ou* à B ou aux deux est noté $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$. (on lit « A union B » ou « A ou B »).

Remarque 10.2
Attention : en probabilité quand on parle de l'événement « A ou B », il s'agit d'un « ou » *non exclusif* ; c'est-à-dire qu'une éventualité qui est dans A et dans B est aussi dans « A ou B ». Ce n'est pas

1. Patience ! Nous pourrons répondre à cette question grâce à la simulation statistique dans un chapitre ultérieur.

toujours le cas en français[2] : pendant les vacances je vais à la mer ou la montagne (mais pas aux deux).

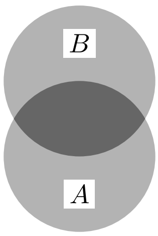
Exemple 10.12
On considère un jeu de 32 cartes. On note A l'événement « obtenir une figure », et B l'événement « obtenir un trèfle ».

1. Expliciter $A \cap B$ et $A \cup B$.
2. Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$.
3. Calculer $p(A) + p(B)$ puis $p(A \cup B) + p(A \cap B)$.

1. $A \cap B$: « obtenir une figure trèfle »
   $A \cup B$: « obtenir une figure ou un trèfle ou une figure trèfle ».
2. $p(A) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$. $p(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.
   $p(A \cap B) = \frac{3}{32}$. $p(A \cup B) = \frac{17}{32}$.
3. $p(A) + p(B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$.
   $p(A \cap B) + p(A \cup B) = \frac{3}{32} + \frac{17}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$.

Propriété 10.3
Soit Ω un univers lié à une expérience aléatoire, et P une loi de probabilité sur Ω. Soit A et B deux événements de Ω. Alors on a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$



Interprétation :
En comptant le nombre d'éventualités de A et en ajoutant le nombre d'éventualités de B, on compte deux fois les éventualités de $A \cap B$. D'où le « $-p(A \cap B)$ » dans la formule de la propriété 10.3

2. Blague : un probabiliste retourne à son boulot après un congé paternité ; sa secrétaire lui demande « alors, c'est une fille ou un garçon ? » Il répond : « oui ».

Chapitre 11

Inéquations

11.1 Définition. Exemples

Définition 11.1
Une *inéquation* est une inégalité dans laquelle figure(nt) un ou plusieurs nombre(s) inconnu(s). Résoudre une inéquation à une inconnue x c'est trouver *tous* les nombres x pour lesquels l'inégalité est vérifiée.

Exemple 11.1
On considère l'inéquation $2x^2 - 2x - 3 \leq 9$.
Le réel $x = 1$ est solution de cette inéquation car si $x = 1$ on a $2x^2 - 2x - 3 = 2 - 2 - 3 = -3$ et $-3 \leq 9$.
De même le réel $x = \sqrt{2}$ est aussi solution car si $x = \sqrt{2}$ alors $2x^2 - 2x - 3 = 2 \times 2 - 2\sqrt{2} - 3 = 1 - 2\sqrt{2}$ et $1 - 2\sqrt{2} \leq 9$.
Par contre $x = 5$ n'est pas solution de l'inéquation car si $x = 5$ alors $2x^2 - 2x - 3 = 37 > 9$.
Question [1] : $x = 3$ est-il solution de cette inéquation ?

Remarque 11.1
On voit que pour vérifier si un nombre est solution d'une inéquation, on doit effectuer un test. Pour automatiser cette vérification on peut écrire un algorithme puis le programmer. Écrivons un algorithme qui teste si un nombre a est solution d'une inéquation du type $f(x) \leq g(x)$:

Entrées : Demander le nombre a;
Demander les expressions $f(x)$ et $g(x)$;
début
    $y_1 \leftarrow f(a)$;
    $y_2 \leftarrow g(a)$;
    si $y_1 \leq y_2$ **alors**
        Afficher « a est solution de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ » ;
    sinon
        Afficher « a n'est pas solution de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ » ;
fin

Algorithme 10 : Vérifier qu'un nombre est solution d'une inéquation

Le programme Xcas :

1. À vous de jouer, je ne vais quand même pas tout faire tout seul…

```
TestIneq(f,g,a):={// Il faudra définir f et g avant l'appel du
   programme
si f(a) > g(a) alors
afficher(a,"est solution de f(x)>g(x)");
 sinon
afficher(a,"n'est pas solution de f(x)>g(x)");
fsi;
}
```

Pour l'utiliser, après l'avoir tapé dans une fenêtre `Prg` puis compilé, on écrit successivement dans des lignes de calculs `f(x):=2x+3` puis `g(x):=x^2` (par exemple) et enfin `TestIneq(f,g,2)` nous renvoie : « 2,"est solution de f(x)>g(x)" » et `TestIneq(f,g,-2)` nous renvoie : « -2,"n'est pas solution de f(x)>g(x)" »

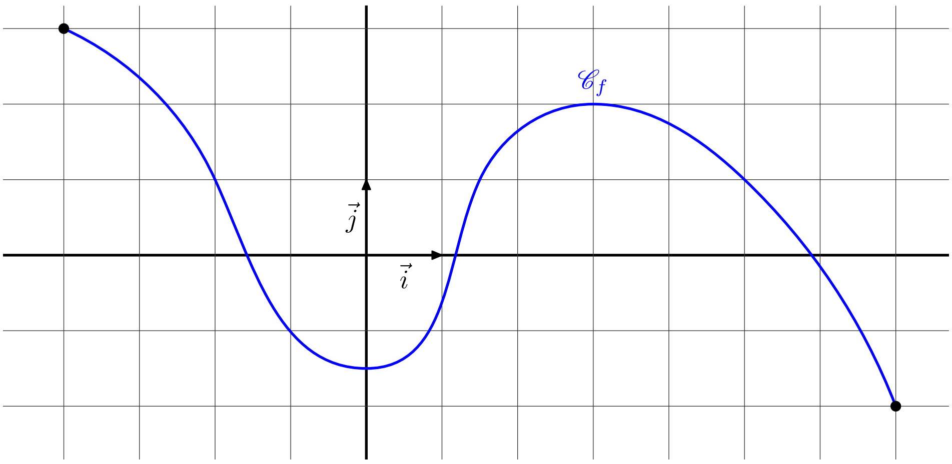
11.2 Résolution graphique

11.2.1 Rappels sur les équations

À savoir

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$ c'est trouver les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui ont pour ordonnée m. Cela revient à rechercher les *antécédents* de m par la fonction f.
Pour déterminer graphiquement les solutions d'une telle équation on cherche les abscisses des points communs entre $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = m$.

Exemple 11.2
Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 7]$.



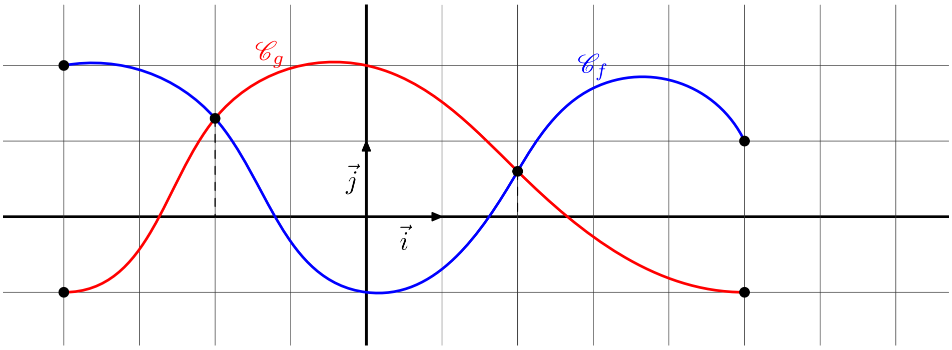
- l'équation $f(x) = 2{,}5$ a une unique solution sur $[-4; 7]$ car un seul point de $\mathscr{C}_f$ a pour ordonnée 2,5 : il s'agit du point qui a pour abscisse environ $-3{,}3$. On écrit $\mathscr{S} = \{-3{,}3\}$;
- l'équation $f(x) = 1$ a trois solutions car il y a trois points de $\mathscr{C}_f$ qui ont pour ordonnée 1 : les points d'abscisses -2 ; 1,5 et 5 ; on écrit $\mathscr{S} = \{-2; 1{,}5; 5\}$;
- l'équation $f(x) = -3$ n'a pas de solution car la courbe $\mathscr{C}_f$ n'a pas de point ayant -3 pour ordonnée ;
- les équations $f(x) = 2$ et $f(x) = -1{,}5$ ont chacune deux solutions.

À savoir

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ c'est trouver les abscisses des points communs à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exemple 11.3

Dans le repère ci-dessous, on a tracé les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-4 ; 5]$.



Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$: $\mathscr{S} = \{-2 ; 2\}$

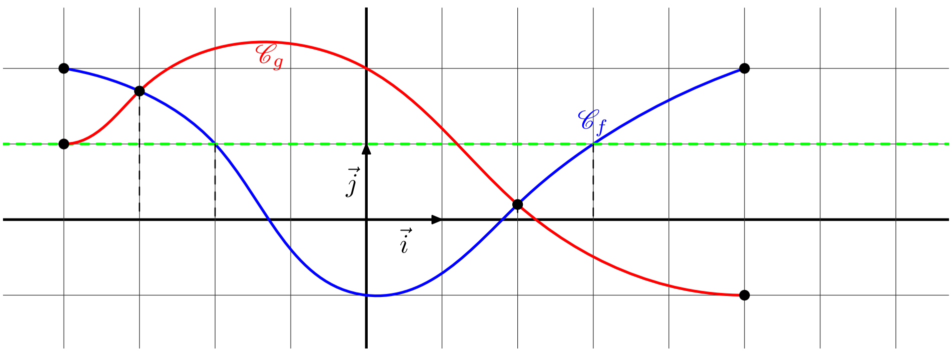
11.2.2 Inéquations

À savoir

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$ c'est trouver les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de $\mathscr{C}_g$.

Exemple 11.4

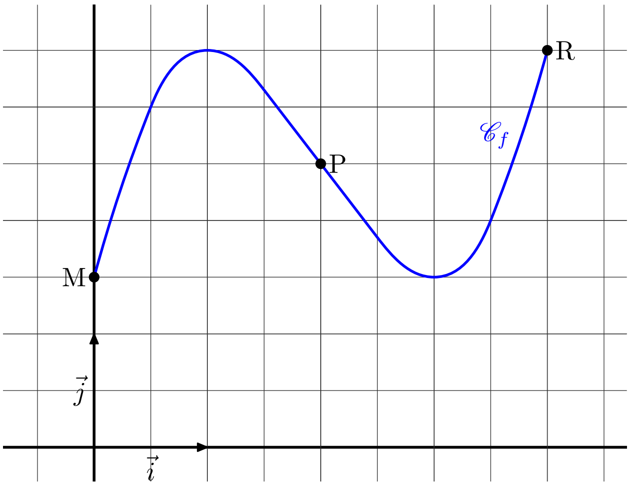
Dans le repère ci-dessous, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-4 ; 5]$.



- les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous (ou sur) $\mathscr{C}_g$: $\mathscr{S} = [-3 ; 2]$.
- les solutions de l'inéquation $f(x) > 1$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés strictement au dessus de la droite d'équation $y = 1$: $\mathscr{S} = [-4 ; -2[\cup]3 ; 5]$.

Exemple 11.5
Sur la figure ci-contre, on a tracé la courbe représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0;4]$.
Soit g la fonction définie sur $[0;4]$ par $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

1. Tracer la représentation graphique de g.
2. Résoudre l'équation $f(x)=2{,}5$.
3. Résoudre l'équation $g(x)=f(x)$.
4. Résoudre l'inéquation $f(x)<g(x)$.
5. Résoudre l'inéquation $g(x)\geq 2$.



11.3 Résolutions algébriques

11.3.1 Inéquations de degré 1

Propriété 11.1
Lorsqu'on ajoute un même nombre aux deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de même sens :

$$\text{si } A<B, \text{ alors pour tout m} \in \mathbf{R} \text{ on a : } A+m<B+m$$

Propriété 11.2
Pour le produit, on a deux cas possibles :

– lorsqu'on multiplie les deux membres d'une inégalité par un même nombre *strictement positif*, on obtient une inégalité de même sens :

$$\text{si } A<B, \text{ alors pour tout m} >0 \text{ on a : } A\times m<B\times m$$

– lorsqu'on multiplie les deux membres d'une inégalité par un même nombre *strictement négatif*, on obtient une inégalité de sens *contraire* :

$$\text{si } A<B, \text{ alors pour tout m} <0 \text{ on a : } A\times m>B\times m$$

Exemple 11.6
Résoudre dans **R** les inéquations suivantes :

$$(\mathrm{I}_1): 3x+4<5x-7; \qquad (\mathrm{I}_2): 4(x-5)\geq 5x+3; \qquad (\mathrm{I}_3): (x+3)(x-5)\leq (x+3)^2$$

11.3.2 Études de signes

Quand on ne peut pas se ramener à une inéquation de degré 1, on peut regrouper tous les termes dans un même membre de l'inéquation et chercher à factoriser ; en effet, en utilisant les règles de produit des signes, on peut facilement étudier le signe d'un produit et donc trouver les intervalles sur lesquels l'inégalité est vraie.

Exemple 11.7
Résoudre dans **R** l'inéquation suivante : (I) : $(2x+3)^2\leq (x-1)^2$.

On remarque que même en développant les deux membres on ne pourra pas éliminer le terme « en x^2 » comme dans l'inéquation (I_3) de l'exemple 11.6. On regroupe donc tous les termes dans le membre de gauche et on factorise à l'aide de la troisième identité remarquable :

$$\begin{aligned}
(I) \quad &\iff \quad (2x+3)^2 - (x-1)^2 \leq 0 \\
&\iff \quad \big((2x+3)-(x-1)\big)\big((2x+3)+(x-1)\big) \leq 0 \\
&\iff \quad (x+4)(3x+2) \leq 0
\end{aligned}$$

Étudions alors le signe de $(x+4)(3x+2)$; pour cela on complète un tableau de signes à plusieurs lignes :

x	$-\infty$		-4		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+4)(3x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On doit trouver les x pour lesquels le produit est négatif ou nul donc $\mathscr{S} = \left[-4; -\frac{2}{3}\right]$.

Exemple 11.8
Résoudre les inéquations suivantes :

$$(I_1) : (2x-5)^2 > 36; \qquad (I_2) : (4x+3)(3-5x) < 0$$

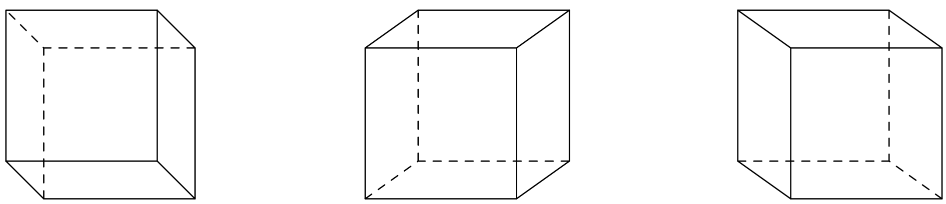
« *Le carré est un triangle qui a réussi ou une circonférence qui a mal tourné* »
PIERRE DAC

Chapitre 12

Géométrie spatiale

12.1 La perspective cavalière

Une représentation en perspective d'un solide de l'espace (à trois dimensions) sur un plan (deux dimensions) n'est pas évidente. Il existe plusieurs types de représentations en perspective. Dans la suite, pour les dessins « à la main », nous utiliserons la perspective *cavalière*.
En fait, le résultat d'une représentation en perspective cavalière est l'ombre du solide sur un écran lorsque la source de lumière est très éloignée de l'objet. Souvent, dans une représentation en perspective cavalière une face du solide est parallèle à « l'écran » ; on dit que cette face est dans un plan *frontal*. On la représente alors en vraie grandeur ou à l'échelle. Les droites perpendiculaires à un plan frontal sont appelées *lignes de fuite*.
Lorsqu'on représente un solide en perpective cavalière, la figure obtenue n'est pas unique. Ainsi, un même cube peut avoir plusieurs représentations en perspective (cela dépend de la position de la source de lumière par rapport à l'écran) :



Propriété 12.1
Quelques propriétés géométriques sont toujours conservées dans une représentation en perpective cavalière :

le parallèlisme : deux droites parallèles sur le solide le sont aussi sur la représentation en perspective cavalière.

les rapports de longueurs de deux segments parallèles : si (AB) et (CD) sont deux droites parallèles d'un solide et A′, B′, C′, D′ les points représentants respectivement A, B, C, D sur la figure en perspective cavalière, alors : $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$. Les milieux sont donc conservés.

12.2 Quelques solides courants

Dans le tableau ci-après, on a regroupé quelques solides à connaître (nature, éléments caractéristiques, formules du volume, …).

12.3 Positions relatives

12.3.1 Données essentielles

Par deux points distincts de l'espace il ne passe qu'une seule droite.
Trois points non alignés de l'espace définissent un unique plan.
On dit que deux droites sont coplanaires si elles sont dans un même plan. On peut le dire aussi de quatre points (ou plus...).

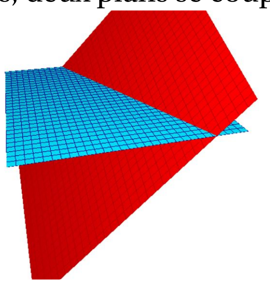
Propriété 12.2
Dans un plan de l'espace, toutes les propriétés de géométrie plane s'appliquent.

Exemple 12.1
ABCDEFGH est un cube de côté 4 cm. On note O le point d'intersection des diagonales [AG] et [BH]. On admet que O est leur milieu.

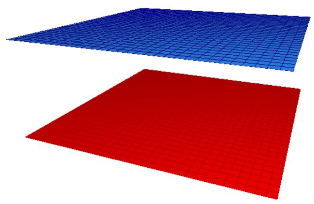
1. Calculer la longueur de la diagonale [AG].
2. Le triangle GOB est-il rectangle ?
3. Les diagonales d'un cube sont-elles perpendiculaires ?

12.3.2 Deux plans

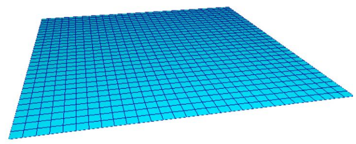
Deux plans de l'espace peuvent être sécants, strictement parallèles ou confondus. Lorsqu'ils sont sécants, deux plans se coupent suivant une droite.



Plans sécants



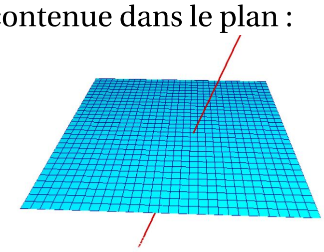
Plans parallèles



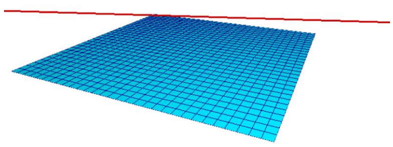
Plans confondus

12.3.3 Un plan et une droite

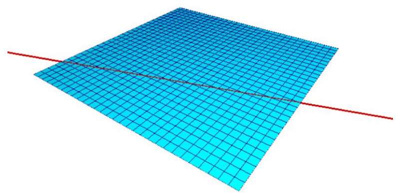
Une droite peut être sécante à un plan, elle peut être strictement parallèle au plan ou encore être contenue dans le plan :



Droite sécante au plan



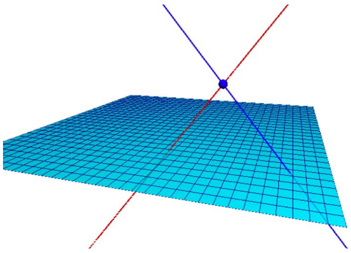
Droite parallèle au plan

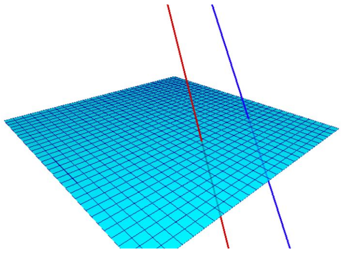


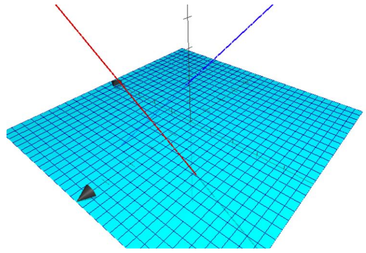
Droite contenue dans le plan

12.3.4 Deux droites

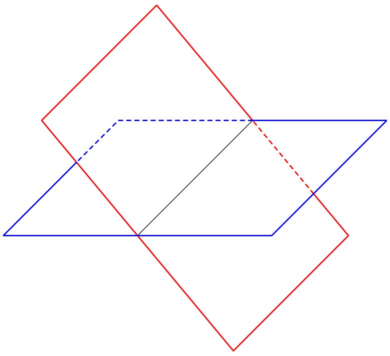
Deux droites peuvent être coplanaires, dans ce cas elles sont parallèles ou sécantes, ou alors non-coplanaires,dans ce cas elles n'ont pas de point commun mais ne sont pas non plus parallèles.

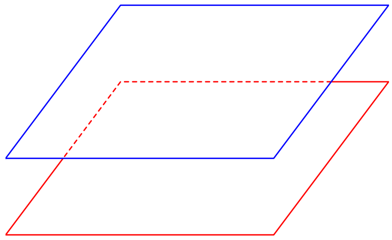

Droites sécantes

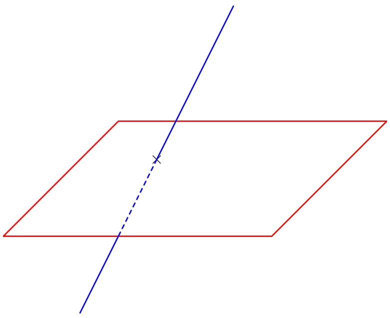

Droites parallèles

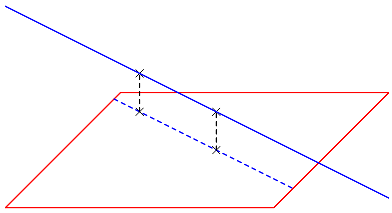

Droites non coplanaires

12.3.5 Quelques figures en perspective cavalière









12.4 Parallélisme dans l'espace

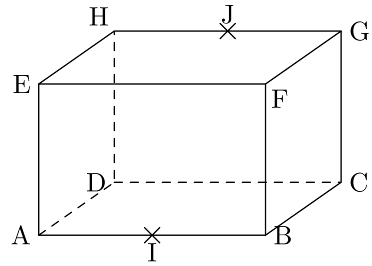
Définition 12.1
Deux droites de l'espace sont parallèles si elles sont coplanaires et non sécantes.

Axiomes d'Euclide :

– par tout point de l'espace il passe une seule droite parallèle à une droite donnée ;
– par tout point de l'espace il passe un seul plan parallèle à un plan donné.

Exemple 12.2
Sur la figure ci-après, ABCDEFGH est un pavé droit représenté en perspective cavalière. I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [GH].

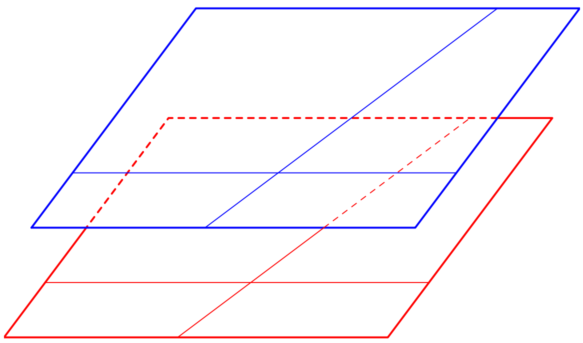
1. Citer la droite parallèle à (HF) passant par B ?
2. Quel est le plan parallèle à (IDH) passant par F ?
3. Tracer la droite parallèle à (EG) passant par B.
4. Citer trois plans parallèles à (BC) passant par E.

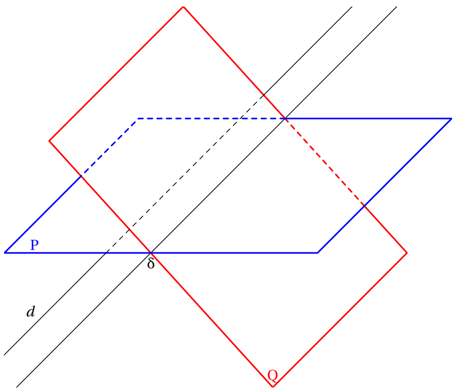


Propriété 12.3
Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
Si deux plans sont parallèles à un même troisième, alors ils sont parallèles.

Théorème 12.1
Si deux droites sécantes d'un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles à deux droites sécantes d'un plan $\mathscr{Q}$ alors les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles.

Théorème 12.2
Si deux droites de l'espace d et δ sont parallèles, alors la droite d est parallèle à tout plan contenant δ.


Théorème 12.1



Théorème 12.2

Chapitre 13

Statistiques : épisode 2

Dans le chapitre 8 nous avons appris des outils permettant d'étudier une série statistiques. Dans ce chapitre nous allons apprendre à obtenir des séries statistiques grâce à la simulation d'expériences aléatoires et nous allons aussi nous intéresser à l'échantillonnage et à un de ses problème : comment déterminer si un échantillon est représentatif d'une population ou d'une situation ?

13.1 Simulation

Pour obtenir des données statistiques sur un phénomène aléatoire (jeu de dés, de cartes, de loterie, n'obtenir que des feux verts lors d'un trajet, réussite au bac [1],...) on peut répéter un grand nombre de fois une expérience et consigner les résultats pour ensuite les traiter. Cette méthode peut être longue et fastidieuse si on veut par exemple s'intéresser à la somme des nombres obtenus sur les faces supérieures de deux dés jetés simultanément [2]. Pour y remédier on peut utiliser une calculatrice, un tableur ou mieux un langage de programmation quelconque sur un ordinateur.

Lorsqu'on veut simuler une expérience où intervient le hasard, on va demander à la machine (calculatrice ou ordinateur) des nombres aléatoires. Ces nombres s'obtiennent avec la fonction *Random* qui nous renvoie un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 (mais différent de 1). En le multipliant par 6, on obtient un nombre entre 0 et 6 (6 exclu). En prenant la partie entière, on obtient un entier compris entre 0 et 5. Il reste à ajouter 1 pour obtenir la simulation d'un jet de dé à six faces !

Nous allons résumer ici quelques commandes de la calculatrice et du tableur permettant de simuler des expériences aléatoires.

Voici d'abord quelques séquences de touches pour obtenir certaines fonctions :

	Sur Casio		Sur TI	
Fonction	Pour obtenir	On appuie sur	Pour obtenir	On appuie sur
Random	`RAN#`	`OPTN`, puis `PROB` et `RAN#`	`RAND`	`MATH`, puis `PRB` et `RAND`
Partie entière	`INT`	`OPTN`, puis `NUM` et `INT`	`INT`	`MATH`, puis `NUM` et `INT`

Quelques exemples de simulations :

1. Oups ! La réussite au bac n'est pas aléatoire !
2. Ou pire : si on s'intéresse à la réussite au bac

Expérience à simuler	Commande calculatrice	Formule tableur
Obtenir un nombre aléatoire $x \in [0;1[$	Casio : `RAN#`. TI : `RAND`.	Saisir la formule suivante dans une cellule : `=ALEA()`
Simuler le jet d'un dé à six faces numérotées de 1 à 6	Casio : `INT(6*RAN#)+1`. TI : `INT(6*RAND)+1`.	Saisir la formule `=ENT(6*ALEA())+1`
« Pile ou face » : 0=pile, 1=face	Casio : `INT(2*RAN#)` TI : `INT(2*RAND)`	`=SI(ALEA()<0,5; "face";"pile")`
Simuler une famille de trois enfants (chiffre pair = garçon, chiffre impair = fille)	Casio : `INT(1000*RAN#)` TI : `INT(1000*RAND)`	`=ENT(1000*ALEA())`
Somme de deux dés	Casio : `INT(6*RAN#+1) +INT(6*RAN#+1)` TI : `INT(6*RAND+1) +INT(6*RAND+1)`	`=ENT(6*ALEA()+1) +ENT(6*ALEA()+1)`

13.2 Échantillonage

Définition 13.1
Lorsqu'on « prélève » n individus d'une population, on dit que ces n individus constituent *un échantillon* de la population. L'entier n est appelé la taille de l'échantillon.

Propriété 13.1
Plus la taille d'un échantillon est grande plus la fréquence d'un caractère dans l'échantillon est proche de celle de la population totale.

Exemple 13.1
Pour un sondage « à la sortie des urnes », plus on interroge de personnes sur leur vote, plus la fréquence des personnes ayant voté pour le candidat A dans l'échantillon sera proche de la fréquence des personnes ayant choisi ce candidat dans la population totale[3].

Théorème 13.1 (de l'intervalle de fluctuation)
On considère une population sur laquelle on étudie la proportion p d'individus ayant un caractère C avec $p \in [0,2;0,8]$ et dans laquelle on prélève un échantillon de taille $n \geq 25$.
Dans ces conditions, dans 95 % des échantillons, la proportion p' des individus de l'échantillon ayant le caractère C est comprise dans l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Conséquence :
On considère une population sur laquelle on étudie la proportion p d'individus ayant un caractère C et dans laquelle on prélève un échantillon de taille $n \geq 25$. Si dans l'échantillon, la proportion p' d'individus ayant le caractère C vérifie $p' \in [0,2;0,8]$ alors dans 95 % des cas on peut dire que $p \in \left[p' - \frac{1}{\sqrt{n}}; p' + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

3. Il faut tout de même que les personnes interrogées soient choisies au hasard dans la population totale.

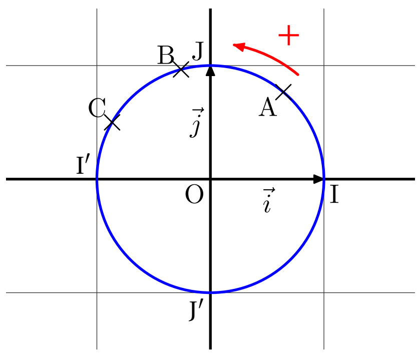
Chapitre 14

Trigonométrie

14.1 Cercle trigonométrique

14.1.1 Définitions

Définition 14.1
Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le cercle de centre O et de rayon 1 est appelé *cercle trigonométrique*.
Sur ce cercle, le *sens direct* est contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre et le *sens indirect* est le sens de rotation des aiguilles d'une montre.

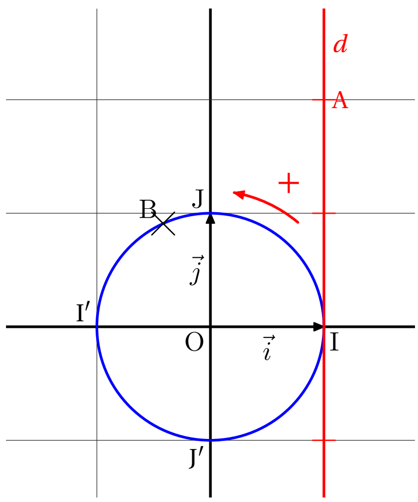


Exemple 14.1
Sur la figure ci-contre, l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ est dans le sens direct (on dit aussi le sens trigonométrique) alors que l'arc orienté $\overset{\frown}{CB}$ est dans le indirect (on dit aussi le sens horaire).

Remarque 14.1
Le cercle trigonométrique a pour longueur $2\pi R$; or $R = 1$ donc la longueur vaut 2π.
L'arc orienté $\overset{\frown}{IJ}$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$; l'arc orienté $\overset{\frown}{IJ}$ a pour mesure $-\frac{\pi}{2}$.

14.1.2 Enroulement de R

Sur la figure ci-contre, on a tracé le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ainsi qu'une droite graduée d d'origine I, parallèle à $(O; \vec{j})$ et de même unité que le repère.
La droite d représente l'ensemble **R** des nombres réels : à chaque réel x correspond le point de d qui a pour abscisse x sur la droite d.
En « enroulant » cette droite d autour du cercle trigonométrique, à chaque point de d va correspondre un unique point de $\mathscr{C}$.
Ainsi le point A d'abscisse 2 sur la droite d se retrouve sur le point B du cercle $\mathscr{C}$; 2 est alors une mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{IB}$.
On peut remarquer que A′ d'abscisse $2 + 2\pi$ sur d se retrouve aussi en B après l'enroulement de d.

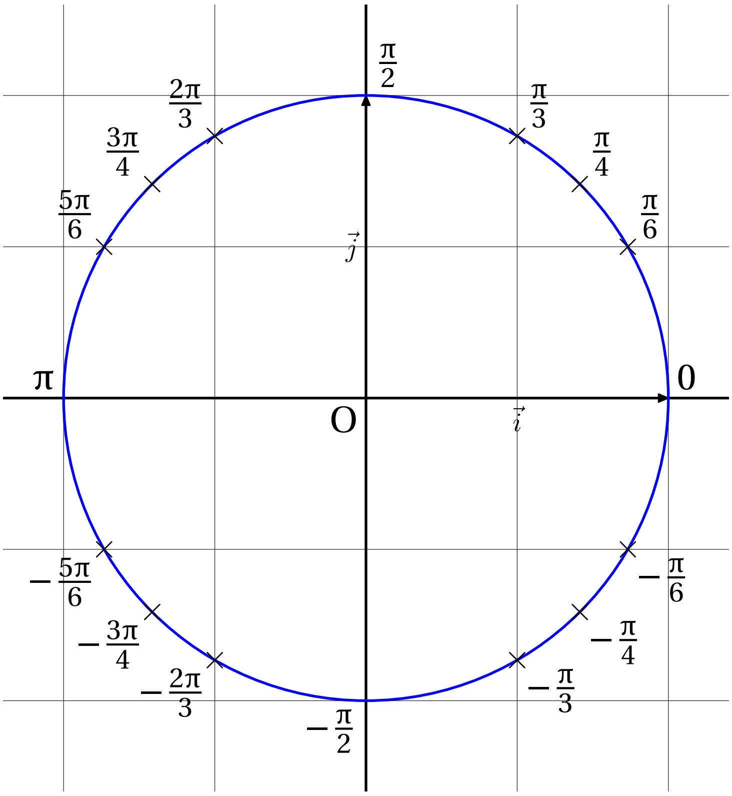


Définition 14.2
Le *radian* est une unité de mesure des angles. On note cette unité rad.
Un angle de centre O a pour mesure 1 rad s'il intercepte sur le cercle trigonométrique un arc de mesure 1.

Remarque 14.2
Les mesures d'un angle en degrés et en radians sont proportionnelles. On donne dans le tableau ci-dessous quelques correspondances :

mesure en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°	≈ 57°
mesure en radians	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	2π rad	1 rad

Quelques angles en radians sur le cercle trigonométrique :

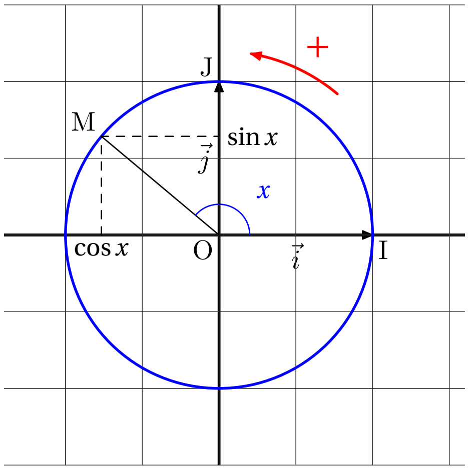


Remarque 14.3
On a vu que plusieurs points de la droite d qu'on enroule autour du cercle trigonométrique peuvent se retrouver sur le même point de ce cercle. Ainsi, un point du cercle trigonométrique peut être associé à plusieurs mesures d'angles différant d'un multiple de 2π.
On appelle *mesure principale* d'un angle exprimée en radians la mesure de cet angle qui est comprise dans l'intervalle $]-\pi\,;+\pi]$.

Exemple 14.2
Le point A correspond sur le cercle trigonométrique au réel $x = \frac{7\pi}{4}$. En plaçant A, on peut facilement trouver la mesure principale de l'angle correspondant : il s'agit de $-\frac{\pi}{4}$.
On remarque que $\frac{7\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi$.

14.2 Les fonctions trigonométriques

14.2.1 Sinus et cosinus d'un réel



Définition 14.3
Soit x un réel et M le point associé à x sur le cercle trigonométrique ; c'est à dire que l'arc orienté $\overset{\frown}{\text{IM}}$ a pour mesure x. On a alors :
- le *cosinus* de x qu'on note $\cos x$ est l'abscisse de M ;
- le *sinus* de x qu'on note $\sin x$ est l'ordonnée de M ;
- si $\cos x \neq 0$, la *tangente* de x qu'on note $\tan x$ est le quotient de $\sin x$ par $\cos x$: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Exemple 14.3
On déduit facilement de la définition les valeurs suivantes :

$$\cos(0) = 1;\ \sin(0) = 0; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; \qquad \cos(\pi) = -1;\ \sin(\pi) = 0$$

Propriété 14.1
Pour tout réel x on a :

$$-1 \leq \cos x \leq 1; \qquad -1 \leq \sin x \leq 1; \qquad (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

Remarque 14.4
$(\cos x)^2$ se note aussi $\cos^2 x$ et $(\sin x)^2$ se note aussi $\sin^2 x$.
Ainsi la dernière égalité de la proprieté 14.1 se note $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Propriété 14.2
Pour tout réel x on a : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$

Quelques valeurs à connaître :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	VI	0

14.2.2 Étude des fonctions

Pour tout réel x on a défini deux réels $\cos x$ et $\sin x$. On peut donc définir les *fonctions* cosinus et sinus qui, à tout x associent respectivement $\cos x$ et $\sin x$:

$$\cos : x \longmapsto \cos x \quad \text{et} \quad \sin : x \longmapsto \sin x$$

Propriété 14.3
Pour tout x réel on a : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. On dit que les fonctions cosinus et sinus sont *périodiques* de période 2π ou encore qu'elles sont 2π-périodiques.

Conséquence graphique :
Pour tracer la courbe représentative de la fonction sinus (il en va de même pour la fonction cosinus) sur **R**, il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur 2π, par exemple l'intervalle $]-\pi\,;+\pi]$ et de reproduire ce morceau de courbe par translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Variations :

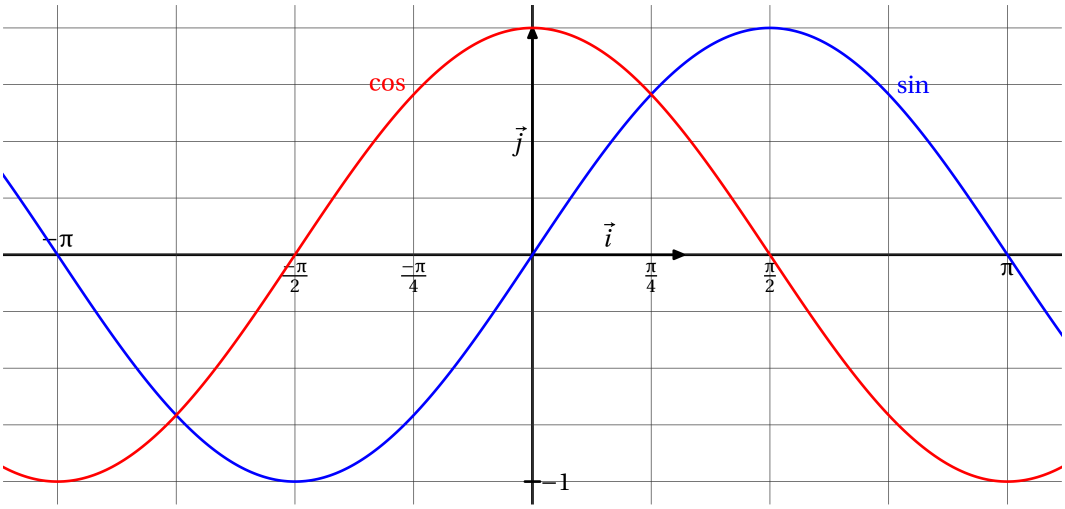
La fonction sinus :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
sin	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

La fonction cosinus :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
cos	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Représentations graphiques :
Les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus sont appelées des *sinusoïdes* ; on les trace généralement dans un repère où l'axe des abscisses est gradué suivant des multiples de π.



Liste des Algorithmes