1 Vocabulaire

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathscr{D}$. Pour chaque valeur x de $\mathscr{D}$, la fonction f permet de calculer un autre nombre qu'on note $f(x)$.
Pour chaque x, le nombre $f(x)$ est unique : c'est *l'image* de x par la fonction f.
Si y est un nombre tel qu'il existe $x \in \mathscr{D}$ vérifiant $f(x) = y$ on dit que x est un *antécédent* de y par la fonction f. Un nombre y peut avoir plusieurs antécédents.

Exercice 1.
Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - x - 1$.

1. Calculer les images de -3, de 5, de -2 et de 10.
2. Déterminer tous les antécédents de -1.

Exercice 2.
Reprendre les questions de l'exercice précédent pour la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 7}$.

2 Valeurs interdites. Ensemble de définition

Parfois, pour certaines valeurs de x, il n'est pas possible de calculer l'image de x par une fonction f. Dans ce cas on dit que ces valeurs de x sont des *valeurs interdites* pour la fonction. L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on peut calculer $f(x)$ est appelé *l'ensemble de définition* de la fonction. On le note généralement $\mathscr{D}_f$.

Exercice 3.
On donne $f : x \mapsto \frac{x+3}{2x-10}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x+2}$.

1. Peut-on calculer l'image de -3 par f ? et par g ? Expliquer.
2. Même question pour l'image de 5 par f puis par g.
3. Résoudre l'équation $2x - 10 = 0$. En déduire toutes les valeurs interdites de f, puis l'ensemble de définition de f.
4. Résoudre l'inéquation $x + 2 \geq 0$. En déduire l'ensemble de définition de g.

Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction f,
- on regarde s'il y a un quotient dans l'expression de $f(x)$: les valeurs de x solutions de l'équation « dénominateur $= 0$ » sont alors des valeurs interdites pour f.
- on regarde s'il y a des racines carrées dans l'expression de $f(x)$. L'ensemble de définition de f est alors contenu dans l'ensemble des solutions de l'inéquation « expression sous la racine ≥ 0 ».
- l'ensemble de définition peut aussi être restreint par des contraintes de l'énoncé : si $f(x)$ est la longueur d'un segment, il faut que $f(x)$ soit positif ou nul...

Exercice 4.
Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto 3x^2 - 5x + 2; \quad g : x \mapsto \frac{3x+2}{2x-3}; \quad h : x \mapsto \frac{2x-5}{(x-3)(2x+5)}; \quad m : x \mapsto \sqrt{x}$$

$$n : x \mapsto \sqrt{3x+2}; \quad p : x \mapsto \sqrt{2x^2+3}; \quad q : x \mapsto \frac{\sqrt{5-3x}}{2x+5}; \quad r : x \mapsto \frac{\sqrt{x-3}}{x-5}$$

$$s : x \mapsto \frac{2x+1}{x^2-4}; \quad t : x \mapsto \frac{2x-3}{x-4} + \frac{x-4}{x-2}; \quad u : x \mapsto \frac{2}{4x^2-12x+9}; \quad v : x \mapsto \sqrt{2x-1} + \sqrt{2-4x}$$

3 Représentation graphique

Soit f une fonction. Pour chaque valeur x de l'ensemble de définition, on peut calculer $f(x)$. Si on appelle y le nombre $f(x)$, on obtient alors un couple $(x; y)$ qui peut être les coordonnées d'un point M dans un repère. L'ensemble des points M qui ont des coordonnées du type $(x; y)$ où $x \in \mathscr{D}_f$ et $y = f(x)$ est appelé *courbe représentative* de la fonction f dans le repère.

Exercice 5.
Pour chacune des figures ci-dessous, indiquer si la courbe tracée peut être la courbe représentative d'une fonction. Si c'est le cas, donner l'ensemble de définition de la fonction et les images des bornes de l'ensemble de définition.

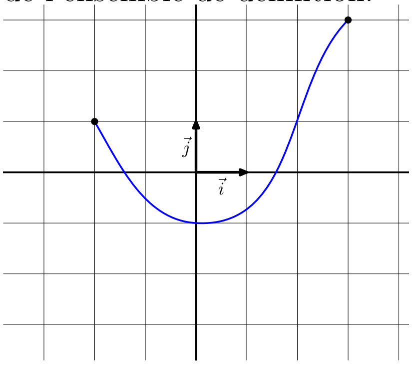


Figure 1

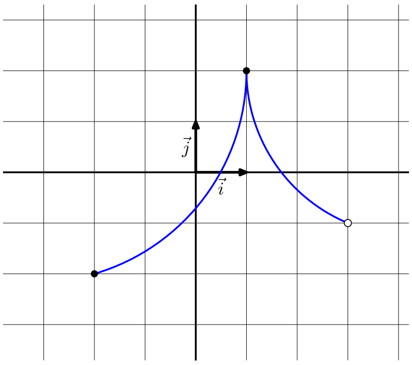


Figure 2

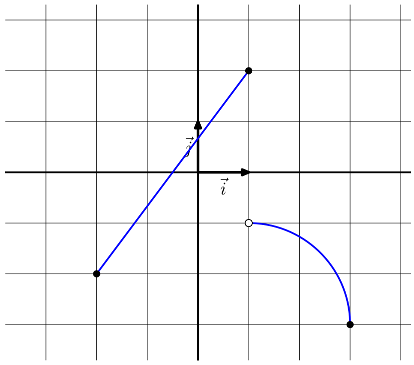


Figure 3

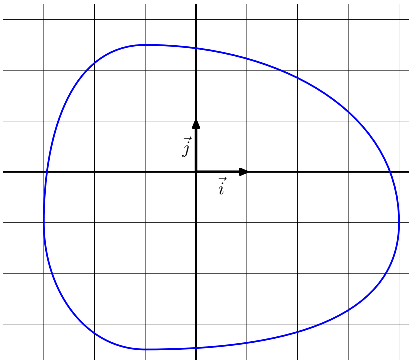


Figure 4

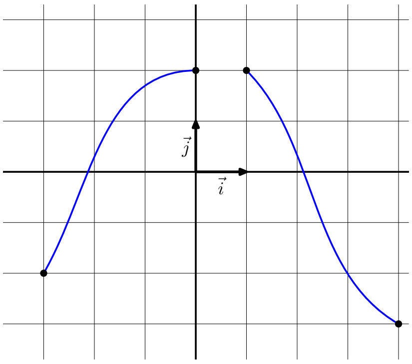


Figure 5

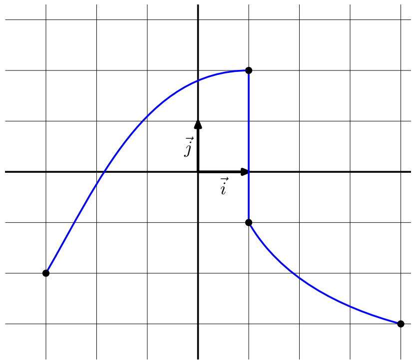
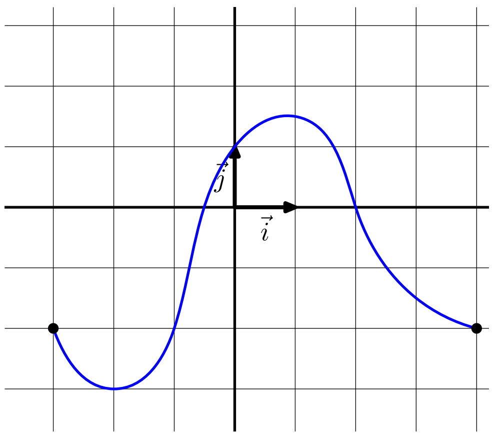


Figure 6

Exemple : sur la figure 1, la courbe est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-2\,;\,3]$. Et graphiquement, on lit : $f(-2) = 1$ et $f(3) = 3$.

Exercice 6.
Sur le graphique ci-contre, on a tracé la représentation graphique d'une fonction f. Répondre aux questions ci-dessous en utilisant le graphique.

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$.
2. Déterminer l'image de 1 et de -2.
3. Résoudre $f(x) = -2$.
4. Déterminer $f(0)$.
5. Déterminer la valeur minimale de $f(x)$. Pour quelle valeur de x ce minimum est-il atteint ?



4 Variations d'une fonction

On dit d'une fonction f qu'elle est *strictement croissante* sur un intervalle I lorsque :
pour tout $a \in I$ et tout $b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$; Les antécédents et leurs images sont rangés dans le *même* ordre. Graphiquement cela se traduit par une courbe qui « monte » lorsqu'on se déplace de la gauche vers la droite.
On dit d'une fonction f qu'elle est *strictement décroissante* sur un intervalle I lorsque :
pour tout $a \in I$ et tout $b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$; les antécédents et leurs images sont rangés dans l'ordre *contraire*. Graphiquement cela se traduit par une courbe qui « descend » lorsqu'on se déplace de la gauche vers la droite.

Exercice 7.
Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions des exercices 5 et 6.
Exemple : voici le tableau de variation de la fonction de la figure 1 de l'exercice 5.

x	-2		0		3
f	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

Exercice 8.
Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$. On sait que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,3]$ et qu'elle est strictement croissante sur $[3\,;\,+\infty[$. De plus $f(3) = 2$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) > 0$. Justifier soigneusement.

Exercice 9.
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 5$.

1. Calculer les images de tous les entiers compris entre -5 et 2. Regrouper les résultats dans le tableau de valeurs ci-dessous :

x								
$f(x)$								

2. Placer les points correspondants à chaque couple $(x\,;\,f(x))$ dans un repère. (unités : 1 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée), puis tracer l'allure de la courbe représentative de $\mathscr{C}_f$.
3. Quel semble être le minimum atteint par la fonction f ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?
4. Exprimer $f(x)-1$ en fonction de x et factoriser l'expression obtenue. En déduire la confirmation du résultat conjecturé à la question précédente.
5. On se fixe $a \in]-\infty\,;\,-2]$ et $b \in]-\infty\,;\,-2]$ tels que $a < b$.
   a. Exprimer $f(b) - f(a)$ en fonction de a et b. Factoriser par $(b - a)$.
   b. Que peut-on dire du signe de $b - a$? et de $a + b + 4$? En déduire le signe de $f(b) - f(a)$, puis les variations de f sur $]-\infty\,;\,-2]$.
   c. Effectuer la même étude sur $[-2\,;\,+\infty[$. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 10 (On pourra s'inspirer de l'exercice précédent)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x - 2$.

1. Montrer que -11 est le minimum de f sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que f est décroissante sur $]-\infty\,;\,3]$ et croissante sur $[3\,;\,+\infty[$.

5 Parité

On dit d'une fonction qu'elle est *paire* si :
– Son ensemble de définition est symétrique par rapport à l'origine (i.e. si $x \in \mathscr{D}_f$ alors $-x \in \mathscr{D}_f$).
– Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.
On dit d'une fonction qu'elle est *impaire* si :
– Son ensemble de définition est symétrique par rapport à l'origine (i.e. si $x \in \mathscr{D}_f$ alors $-x \in \mathscr{D}_f$).
– Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.
Étudier la parité d'une fonction signifie « déterminer si une fonction est paire, impaire ou ni l'un ni l'autre ».

Exercice 11.
Déterminer l'ensemble de définition puis étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x^2; \quad g : x \mapsto 3x; \quad h : x \mapsto 2x^2+3; \quad m : x \mapsto 3x^2+2x; \quad n : x \mapsto 2x^3+x$$

$$p : x \mapsto 2\sqrt{x}; \quad q : x \mapsto \sqrt{x^2+3}; \quad r : x \mapsto \sqrt{x^2-1}; \quad s : x \mapsto \sqrt{3x-5}$$

Exercice 12.
Dans chacun des cas suivants, étudier la parité de la fonction f.

1. f est définie sur $[-3\,;\,5]$ par $f(x) = 3x^2 - 5$.
2. f est définie sur $]-\infty\,;\,-3] \cup [3\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x^3+x}$.
3. f est définie sur $[-4\,;\,4[$ par $f(x) = \frac{3x^2-1}{x^2+1}$.
4. f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4+3}$.

Exercice 13.
Soit f une fonction paire définie sur $[-5\,;\,5]$. On donne : $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$, $f(-3) = -1$, $f(-4) = 0$ et $f(-5) = 3$.

1. Dresser un tableau de valeurs de la fonction f pour tous les x entiers compris entre -5 et 5.
2. Placer les points correspondants dans un repère et tracer l'allure de la courbe représentant la fonction f.
3. Que constate-t-on ? Justifier.

Exercice 14.
Soit f une fonction impaire définie sur $[-5\,;\,5]$. On donne : $f(1) = 2$, $f(2) = 0$, $f(-3) = 1{,}5$, $f(-4) = 2$ et $f(-5) = 0$.

1. Combien vaut $f(0)$? Justifier.
2. Dresser un tableau de valeurs de la fonction f pour tous les x entiers compris entre -5 et 5.
3. Placer les points correspondants dans un repère et tracer l'allure de la courbe représentant la fonction f.
4. Que constate-t-on ? Justifier.