Chapitre 1

Fonctions numériques

1 En fonction de ...

Exercice 1.
On considère un triangle équilatéral ABC et H le pied de la hauteur issue de A.

1. Calculer AH lorsque $AB = 3$. Même question avec $AB = \sqrt{2}$.
2. On pose maintenant x la longueur du côté $[AB]$. Exprimer en fonction de x la longueur AH.
3. Remplacer dans l'expression trouvée à la question précédente x par 3 puis par $\sqrt{2}$ et calculer.

Exercice 2.
On considère PRC un triangle vérifiant $PR = 5$, $RC = 4$ et $\widehat{PRC} = 30°$. On note O le milieu de $[PR]$. A est un point du segment $[RC]$ et B est le point de $[PC]$ tel que (AB) est parallèle à (RO). On note H l'intersection entre (RP) et la perpendiculaire à (RP) passant par A. Si vous êtes en salle informatique (ou chez vous), vous pouvez faire la construction avec le logiciel GeoGebra [1].

1. Dans cette question, on se place dans le cas où $AR = \frac{3}{2}$.
   a. Faire une figure.
   b. Calculer AB puis AH. En déduire l'aire du trapèze $RABO$.
2. Dans cette question on pose $x = RA$ (qui n'est plus nécessairement égal à $\frac{3}{2}$!).
   a. Exprimer AR puis AH en fonction de x.
   b. En déduire l'expression $\mathscr{A}(x)$ de l'aire de $RABO$ en fonction de x.
3. À quelle condition le trapèze $RABO$ est-il un parallélogramme ? Justifier.
4. À quelle condition les points H et O sont-ils confondus ? Justifier.

2 Vocabulaire

Exercice 3.
Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - x - 1$.

1. Calculer les images de -3, de 5, de -2 et de 10.
2. Déterminer tous les antécédents de -1.

1. GeoGebra est un logiciel de géométrie dynamique téléchargeable *gratuitement* à l'adresse http://www.geogebra.org. Nous l'utiliserons à plusieurs reprises cette année et vous pouvez consulter un petit mode d'emploi là : http://reymarlioz.free.fr à la rubrique « pour tous ».

Exercice 4.
Reprendre les questions de l'exercice précédent pour la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+7}$.

3 Valeurs interdites. Ensemble de définition

Rappel

Parfois, pour certaines valeurs de x, il n'est pas possible de calculer l'image de x par une fonction f. Dans ce cas on dit que ces valeurs de x sont des *valeurs interdites* pour la fonction. L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on peut calculer $f(x)$ est appelé *l'ensemble de définition* de la fonction. On le note généralement $\mathscr{D}_f$.

Exercice 5.
On donne $f : x \mapsto \frac{x+3}{2x-10}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x+2}$.

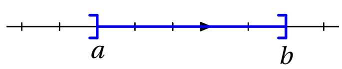
1. Peut-on calculer l'image de -3 par f ? et par g ? Expliquer.
2. Même question pour l'image de 5 par f puis par g.
3. Résoudre l'équation $2x - 10 = 0$. En déduire toutes les valeurs interdites de f, puis l'ensemble de définition de f.
4. Résoudre l'inéquation $x + 2 \geq 0$. En déduire l'ensemble de définition de g.

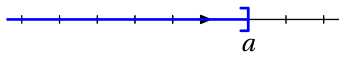
Rappel

Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction f,
- on regarde s'il y a un quotient dans l'expression de $f(x)$: les valeurs de x solutions de l'équation « dénominateur $= 0$ » sont alors des valeurs interdites pour f.
- on regarde s'il y a des racines carrées dans l'expression de $f(x)$. L'ensemble de définition de f est alors contenu dans l'ensemble des solutions de l'inéquation « expression sous la racine ≥ 0 ».
- l'ensemble de définition peut aussi être restreint par des contraintes de l'énoncé : si $f(x)$ est la longueur d'un segment, il faut que $f(x)$ soit positif ou nul…

Exercice 6.
Résoudre l'inéquation $3x + 2 \leq 5x - 3$ et représenter la solution sur un axe gradué.

Exercice 7.
Compléter le tableau ci-dessous :

Notation de l'intervalle	Inégalité vérifiée par les éléments x de l'intervalle	Représentation graphique
$[a\,;\,b]$	$a \leq x \leq b$	
	$a < x < b$	
$[a\,;\,b[$		
		

Notation de l'intervalle	Inégalité vérifiée par les éléments x de l'intervalle	Représentation graphique
$[a;+\infty[$	$a \leq x$	
$]a;+\infty[$		
		
	$x < a$	

Exercice 8.
Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto 3x^2 - 5x + 2; \quad g : x \mapsto \frac{3x+2}{2x-3}; \quad h : x \mapsto \frac{2x-5}{(x-3)(2x+5)}; \quad m : x \mapsto \sqrt{x}$$

$$n : x \mapsto \sqrt{3x+2}; \quad p : s : x \mapsto \frac{2x+1}{x^2-4}; \quad q : x \mapsto \frac{2}{4x^2-12x+9}$$

4 Algorithmes

Exercice 9.
On donne ci-dessous l'algorithme 1 qui calcule l'image d'un nombre par une fonction f. Déterminer cette fonction.

Entrées : Saisir x;
début
    Calculer le double de x;
    Retirer 7;
    Élever le résultat au carré;
    Ajouter 1;
fin
Résultat : Afficher « l'image de x est » le résultat du dernier calcul;

Algorithme 1 : Calcul d'une image

Exercice 10.
Écrire l'algorithme permettant de déterminer si un nombre x est un antécédent d'un nombre y par la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x-4}{2x^2+1}$.

Exercice 11.
On donne ci-après l'algorithme 2.

1. Appliquer cet algorithme aux nombres suivants : $x = -3$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ puis $x = 3$.
2. Compléter les phrases suivantes :
   - si $x \in]-\infty\,; 0[$ alors $f(x) =$
   - si $x = 1$ alors $f(x) =$
   - si $x \geq 0$ avec $x \neq 1$ alors $f(x) =$

Entrées : Saisir x;
début
    si $x \geq 0$ **alors**
        si $x \neq 1$ **alors**
            Calculer $\frac{1}{x-1}$;
        sinon
            Calculer $x^2 + 1$;
            Prendre l'inverse du résultat précédent;
    sinon
        Calculer $-2x + 1$;
        Calculer l'opposé du carré du résultat précédent;
fin
Résultat : Afficher le résultat du dernier calcul;

Algorithme 2 : Par morceaux...

5 Représentations graphiques

Exercice 12.
Pour chacune des figures ci-dessous, indiquer si la courbe tracée peut être la courbe représentative d'une fonction (voir le rappel de la page 5). Si c'est le cas, donner l'ensemble de définition de la fonction et les images des bornes de l'ensemble de définition.

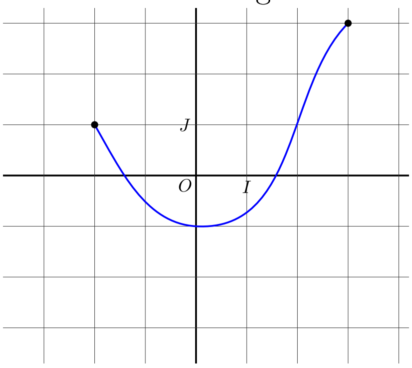


Figure 1

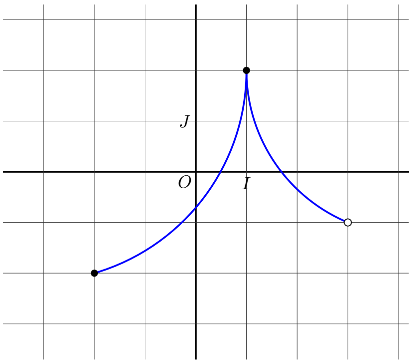


Figure 2

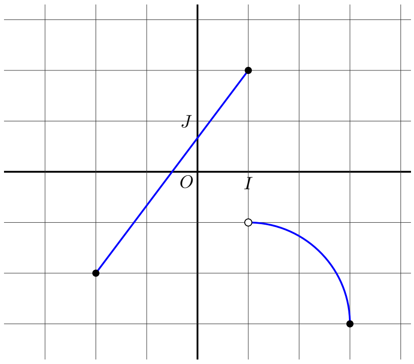


Figure 3

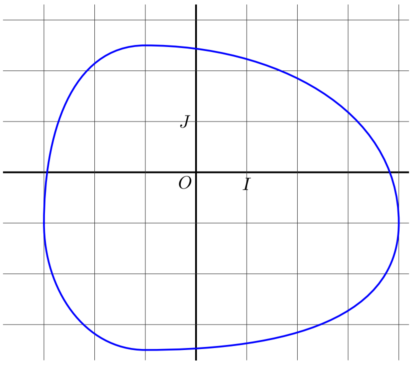


Figure 4

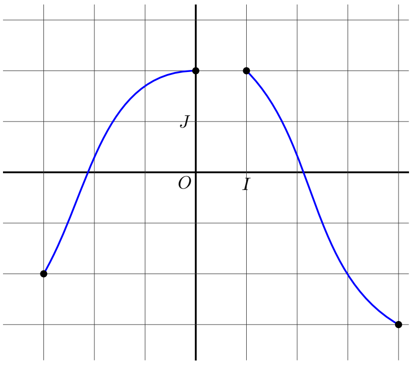


Figure 5

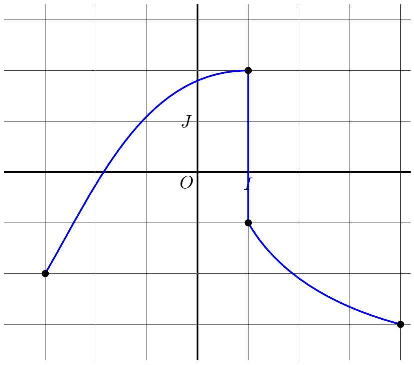


Figure 6

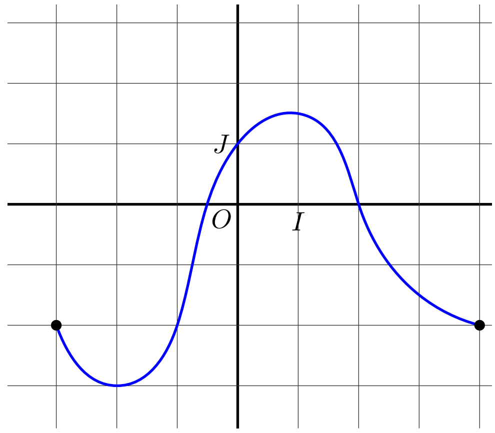
Exemple : sur la figure 1, la courbe est la représentation graphique d'une fonction f définie sur

$[-2\,;\,3]$. Et graphiquement, on lit : $f(-2) = 1$ et $f(3) = 3$.

Rappel

Soit f une fonction. Pour chaque valeur x de l'ensemble de définition, on peut calculer $f(x)$. Si on appelle y le nombre $f(x)$, on obtient alors un couple $(x;y)$ qui peut être les coordonnées d'un point M dans un repère. L'ensemble des points M qui ont des coordonnées du type $(x;y)$ où $x \in \mathscr{D}_f$ et $y = f(x)$ est appelé *courbe représentative* de la fonction f dans le repère.

Exercice 13.
Sur le graphique ci-contre, on a tracé la représentation graphique d'une fonction f. Répondre aux questions ci-dessous en utilisant le graphique.



1. Déterminer $\mathscr{D}_f$.
2. Déterminer l'image de 1 et de -2.
3. Résoudre $f(x) = -2$.
4. Déterminer $f(0)$.
5. Déterminer la valeur minimale de $f(x)$. Pour quelle valeur de x ce minimum est-il atteint ?

Exercice 14.
Que « fait » l'algorithme 3 suivant ?

Entrées : fonction f;
intervalle $[a;b]$;
un entier N;
début
  Calculer $h \leftarrow (b-a)/N$;
  Calculer $x \leftarrow a$;
  pour *k variant de 1 à N* **faire**
    Marquer le point de coordonnées $(x;f(x))$;
    Calculer $x \leftarrow x + h$;
fin

Algorithme 3 : Que fait-il ?

6 Calculatrices

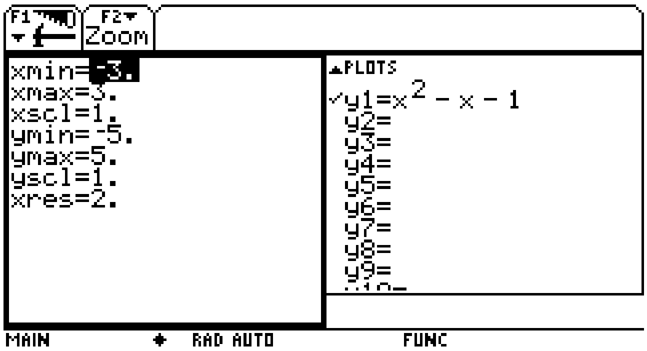
Les caculatrices « graphiques » permettent de représenter graphiquement une fonction mais aussi de dresser des tableaux de valeurs et de lire[2] des résultats (coordonnées de points, maximum, ...).
On considère la fonction f définie sur $[-1\,;\,1]$ par $f(x) = x^2 - x - 1$. Nous allons déterminer une valeur approchée de l'abscisse des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
Traçons la représentation graphique de cette fonction à l'aide de la calculatrice : Pour les « casio », on sélectionne le menu `GRAPH` et pour les « TI », on appuie sur la touche `Y=`.

2. Attention : un résultat « lu » sur un écran, aussi précis soit-il, n'est pas prouvé ! L'activité mathématique consiste à démontrer ce résultat.

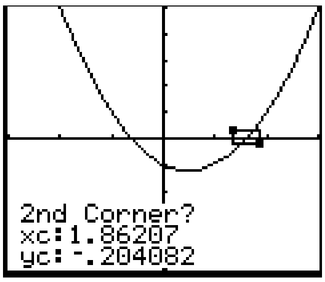
Sur la ligne `Y1=`, on complète par `X^2-X-1`. (On obtient `X` en appuyant sur la touche $\boxed{X, \Theta, T}$.) Appuyer ensuite sur `EXE` pour les casio ou `GRAPH` pour les TI.

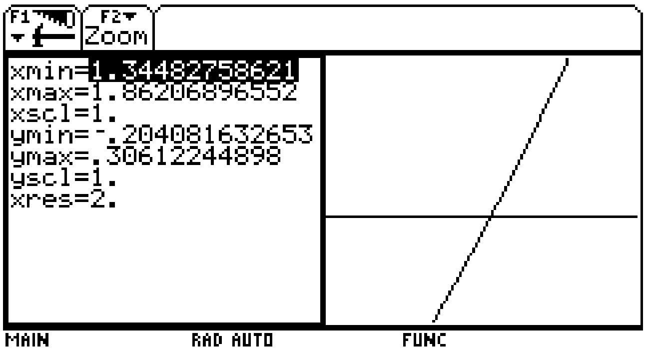
On obtient alors un repère sur l'écran où une courbe est éventuellement tracée. Si la courbe n'apparait pas, c'est sans doute que les unités graphiques sont mal choisies.
Appuyer alors sur la touche `V-Window` ou `Window` un écran affiche alors les valeurs minimales et maximales de `X` et `Y`. Compléter comme ci-après : `Xmin : -3`, `Xmax : 3`, `scale : 1`,
`Ymin : -5`, `Ymax : 5`, `scale : 1`.
Ces valeurs définissent les bornes inférieures et supérieures en abscisses et en ordonnées de la fenêtre à afficher.

Ci-dessous : l'écran `V-Window` et l'écran `Y=` côte à côte.

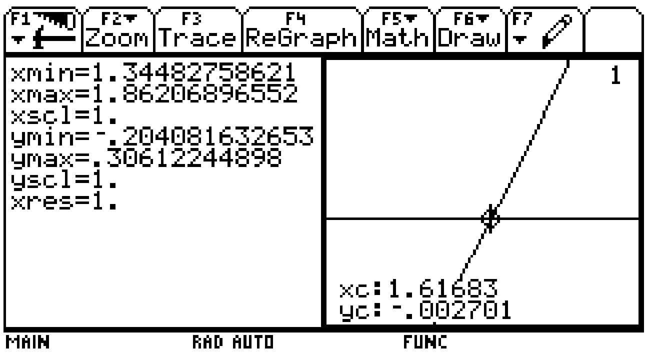


Appuyer maintenant sur la touche `Zoom` et sélectionner `Box` ; déplacer le curseur légèrement au dessus et à gauche d'un point d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses et appuyer sur `EXE` ; déplacer à nouveau le curseur pour que le point d'intersection soit dans le rectangle clignotant et appuyer à nouveau sur `EXE`.
La courbe se trace à nouveau dans une nouvelle fenêtre dont on peut voir les caractéristiques (`Xmin, Xmax, ...`) en appuyant sur `Window`.





Revenir au graphique et appuyer sur la touche `Trace` ; déplacer le curseur sur la courbe. Chercher la position du curseur pour laquelle la valeur de `Y` est la plus proche de 0 ; la valeur de x est affichée sur l'écran : c'est l'abscisse cherchée.
On obtient $x \approx 1{,}62$.



Exercice 15.

1. Utiliser cette méthode pour déterminer une valeur approchée de l'autre solution de $f(x) = 0$.
2. Calculer $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ puis une valeur approchée de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Même question avec $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Obtenir un tableau de valeurs :
On peut aussi utiliser la calculatrice pour dresser un tableau de valeurs d'une fonction numérique. Reprenons la fonction f définie précédemment par $f(x) = x^2 - x - 1$.
Appuyer sur $\boxed{\text{2nde}}$ puis sur $\boxed{\text{TbleSet}}$ et compléter en indiquant les valeurs suivantes :
`TblStart=-5`, `ΔTbl=.5`
Appuyer sur $\boxed{\text{2nde}}$ puis sur $\boxed{\text{Table}}$ et le tableau apparaît en commençant à la valeur saisie en face de `TblStart` avec des écarts entre les x de `ΔTbl`.

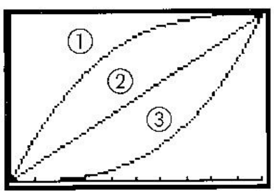
7 Plus difficile. . .

Exercice 16.
Que « fait » l'algorithme 4 suivant :

Entrées : une fonction f;
un intervalle $[a; b]$;
un entier N;
début
    Calculer $L \leftarrow (b - a)$;
    pour *k variant de 1 à N* **faire**
        Calculer $L \leftarrow L/2$;
        Calculer $x \leftarrow a$;
        tant que $x \leq b$ **faire**
            Marquer le point de coordonnées $(x; f(x))$;
            Calculer $x \leftarrow x + L$;
        Attendre un appui sur une touche;
fin

Algorithme 4 : Plus difficile !

Exercice 17.
On considère trois récipients A, B et C de même hauteur et de même volume. A est un cylindre, B est un cône sommet en bas et C est un cône sommet en haut. On remplit chaque récipient d'une hauteur x de liquide. On note respectivement f, g et h les trois fonctions qui à x associent le volume de liquide dans chacun des trois récipients A, B et C.
On donne aussi trois courbes, trois tableaux de valeurs et trois formules. Sans utiliser la calculatrice, associer à chaque récipient une courbe, une fonction, une formule. Justifier !



x	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	0	4,189	33,51	113,1	268,1	523,6
$g(x)$	0	104,7	209,4	314,2	418,9	523,6
$h(x)$	0	255,5	410,5	490,1	519,4	523,6

$$V_1(x) = \frac{\pi x^3}{6}; \quad V_2(x) = \frac{50\pi x}{3}; \quad V_3(x) = \frac{\pi}{6}\left(x^3 - 30x^2 + 300x\right)$$

8 QCM « bilan »

Pour chacune des questions posées ci-après, il peut y avoir une ou plusieurs bonnes réponses.

QUESTIONS	RÉPONSES
1. Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - 5x - 1$. Alors :	☐ -1 est un antécédent de 6 par f ☐ $f(-1) = 6$ ☐ 6 est un antécédent de -1 par f
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x^2 + 1$. Alors :	☐ l'image de -2 par f est 9 ☐ 0 a deux antécédents par f ☐ l'équation $f(x) = 4$ a deux solutions ☐ $f(4) = -31$
3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{x^2+x-2}$. Quels sont les points qui appartiennent à $\mathscr{C}_f$ courbe représentative de f ?	☐ $A(0; -\frac{1}{2})$ ☐ $B(-1; -\frac{1}{2})$ ☐ $C(2; \frac{1}{2})$ ☐ $D(0; 0)$
4. $M(4; -1)$ est un point de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f. Alors :	☐ $f(-1) = 4$ ☐ 4 est un antécédent de -1 par f ☐ $f(4) = -1$ ☐ $N(-1; 4)$ appartient aussi à $\mathscr{C}_f$
5. L'ensemble des nombres qui sont strictement inférieurs à 4 mais supérieurs ou égaux à -5 est noté :	☐ $]4\,;\,-5]$ ☐ $[-5\,;\,4[$ ☐ $]-5\,;\,4[$
6. Si x appartient à l'intervalle $]-2\,;\,3]$, alors :	☐ $x = 0$ ☐ x peut être nul ☐ x peut être égal à -2 ☐ x peut être égal à 3
7. Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{2x-3}$. Alors :	☐ $\frac{3}{2}$ est une valeur interdite pour g ☐ $\mathscr{D}_g = [\frac{3}{2}\,;\,+\infty[$ ☐ $g(\frac{3}{2}) = 0$
8. Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{x+3}{x-2}$. Alors :	☐ $x = -3$ est valeur interdite pour h ☐ $x = 2$ est valeur interdite pour h ☐ $h(5) = 2{,}67$
9. Au cours d'une journée, on mesure la température à chaque heure « pile ». On note T la fonction qui, à une heure « pile » associe la température correspondante.	☐ T est définie sur $[0\,;\,24]$ ☐ T est déf. pour x entier entre 0 et 23 ☐ T n'est pas une fonction

Chapitre 2

Repérage du plan

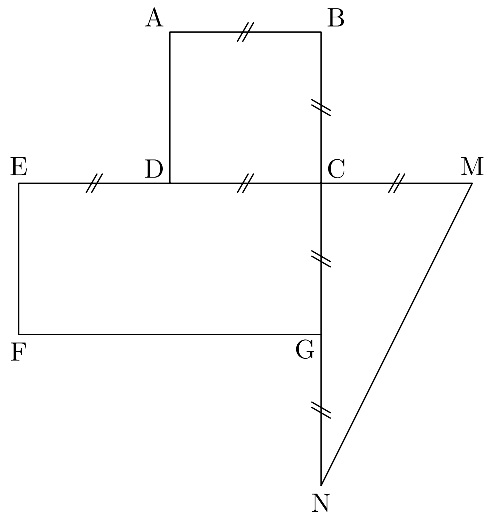
1 Repère du plan

Exercice 1.
On se place dans un repère orthonormé (O, I, J).

1. Placer les points $A(2; -1)$, $B(-1; 3)$, $C(1, 3)$ et $D(-1; 4)$.
2. Déterminer les coordonnées des points O, I, J, A, B, C et D dans le repère (B, C, D).
3. Même question dans le repère (B, D, C).
4. Dans le repère (O, I, J) placer $K(2; 1)$. Quelles sont les coordonnées des points de la figure dans le repère (I, K, J) ?

Exercice 2.
La figure ci-contre est formée par un carré, un rectangle et un tria,gle rectangle.

1. Déterminer les coordonnées de tous les points de cette figure dans le repère $(C; M, B)$.
2. Calculer les coordonnées du milieu I de $[MN]$ et du milieu J de $[EI]$ dans ce même repère.



2 Milieu d'un segment

Exercice 3.
Dans cet exercice on se place dans un repère du plan. On donne $A(3; -1)$, $B(-2; 4)$ et $C(-3; -2)$.

1. Calculer les coordonnées de I, J et K milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
2. Soit $D(x_D; y_D)$ le symétrique de C par rapport à A.
   a. Que peut-on dire de A pour $[CD]$?
   b. Exprimer les coordonnées de A en fonctions de celles de C et de D.

c. En déduire x_D et y_D.

d. Utiliser une méthode analogue pour déterminer les coordonnées de E symétrique de C par rapport à J.

3 Calculs de distances

Exercice 4.
On se place dans un repère orthonormé du plan. On donne $A(-4;-1)$, $B(2;3)$, $C(-3;4)$ et $I(-1;1)$. Nous allons déterminer la nature du triangle ABC de deux façons différentes.

1. a. Calculer AB^2, BC^2 et AC^2.
   b. Quelle est la nature de ABC ? Justifier.
2. a. Calculer AI^2, BI^2 et CI^2.
   b. Que peut-on en déduire pour I par rapport au triangle ABC ?
   c. Calculer les coordonnées du milieu de $[AB]$ et conclure.

4 Configurations géométriques

Exercice 5.
On considère un repère orthonormé du plan (O, I, J).

1. Placer les points $A(-2;-2)$, $B(3;1)$ et $C(2;4)$.
2. Placer le point D de sorte que $ABCD$ soit un parallélogramme et lire ses coordonnées.
3. Dans cette question nous allons *calculer* (et non pas *lire*) les coordonnées de D.
   a. Calculer les coordonnées du point P milieu de $[AC]$.
   b. Que peut-on dire de P pour $[BD]$? Justifier.
   c. Calculer les coordonnées de D (on pourra utiliser la méthode de l'exercice 3). Comparer avec le résultat lu à la question 2
4. $ABCD$ est-il un rectangle ? Justifier.
5. $ABCD$ est-il un losange ? Justifier.

Exercice 6.
Dans un repère orthonormé, on donne $P(-4;-1)$, $Q(1;0)$, $R(2;2)$ et $S(-3;1)$. Déterminer la nature du quadrilatère $PQRS$.

Exercice 7.
Dans un repère orthonormé on donne $A(4;3)$, $B(-1;0)$, $K(3;-1)$ et $L(\frac{1}{2};3)$.

1. Calculer AK et BK. Que peut-on en déduire pour K par rapport à $[AB]$?
2. En est-il de même pour L ?

Exercice 8.
Dans un repère orthonormé on donne $A(4;2)$, $B(6;-4)$ et $C(0;-2)$.

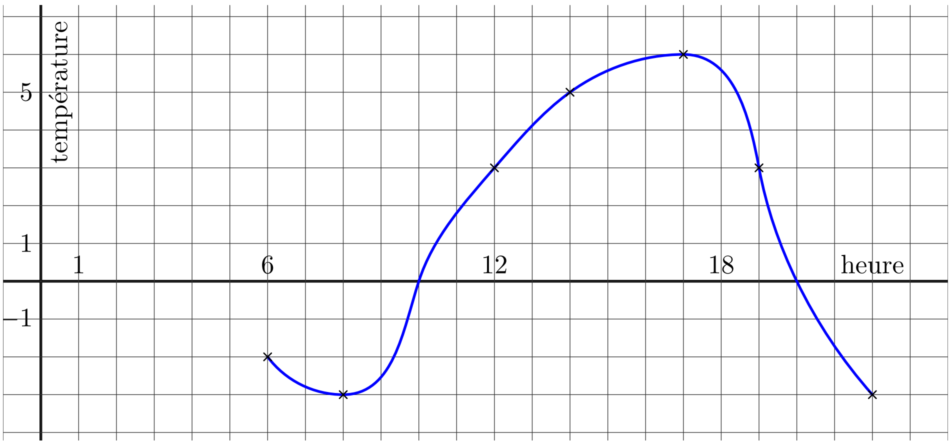
1. Démontrer que le triangle ABC est isocèle. Est-il équilatéral ?
2. On note H le pied de la hauteur issue de B. Calculer AH puis BH.
3. Calculer l'aire du triangle ABC.

Chapitre 3

Étude qualitative de fonctions

1 Activités : variations d'une fonction

Un appareil a permis de relever la température de façon continue de 6h à 22h au cours d'une journée. Le relevé est donné sous forme de graphique :



1.1 Découverte

1. Donner la température à 8h et à 14h.
2. À quelle(s) heure(s) la température est-elle de 5°C ? de -2°C ?
3. Sur quelle(s) plage(s) horaire(s) la température augmente-t-elle ? Diminue-t-elle ?
4. À quelle(s) heure(s) la température est-elle maximale ? Minimale ? Quelles sont les températures extrêmes ?

1.2 Mathématiquement

Soit f la fonction qui à chaque heure x associe la température.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Quelle est l'image de 8 ? Déterminer $f(14)$.
3. Résoudre $f(x) = 5$. Déterminer les éventuels antécédents de -2.
4. Sur quel(s) intervalle(s) la courbe $\mathscr{C}_f$ « monte-t-elle » ? (on dit alors que f est *croissante*).
5. Sur quel(s) intervalle(s) la courbe $\mathscr{C}_f$ « descend-elle » ? (on dit alors que f est *décroissante*).
6. Déterminer le maximum et le minimum de la fonction f. En quelle(s) valeur(s) sont-ils atteints ?

1.3 Vers la définition...

Reprenons la fonction f définie dans la partie 1.2.

1. On s'intéresse à l'intervalle $[10; 14]$.
   Les réels a et b désignent deux heures distinctes de cet intervalle, a arrivant *avant* b.
   a. Comparer a et b.
   b. Comparer les températures aux instants a et b.
2. On s'intéresse maintenant à l'intervalle $[19; 22]$.
   Les réels a et b désignent deux heures distinctes de cet intervalle, a arrivant *avant* b.
   a. Comparer a et b.
   b. Comparer les températures aux instants a et b.
3. Écrire la définition d'une fonction croissante ; d'une fonction décroissante.

1.4 Application : tableaux de variation

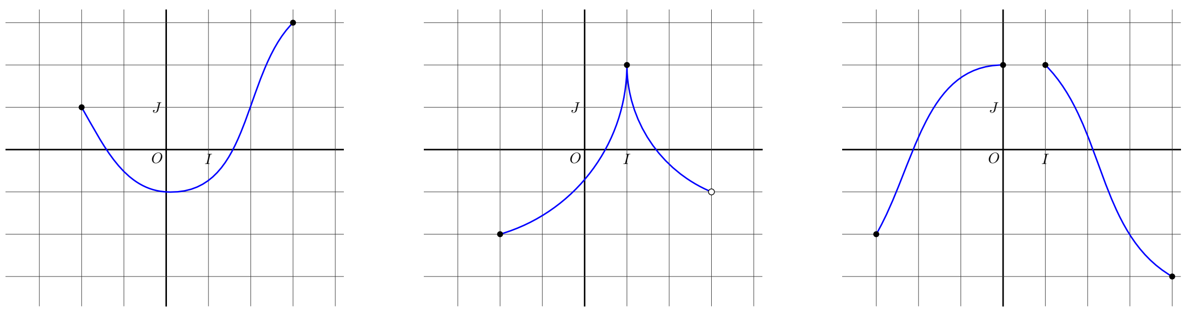
Étudier les variations d'une fonction c'est dire (en justifiant) sur quel(s) intervalle(s) la fonction est croissante et sur quel(s) intervalle(s) elle est décroissante. Généralement, on regroupe ces résultats dans un tableau appelé *tableau de variation* de la fonction. Dans un tel tableau on indique par une flèche montante que la fonction croît et par une flèche descendante que la fonction décroît. Enfin, on indique aux extrémités des flèches les valeurs correspondantes de $f(x)$.

Compléter le tableau de variation de la fonction f de la partie 1.2 :

x	6	8	17	22
f				

2 Quelques exercices

Exercice 1.
Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions dont on donne la représentation graphique ci-dessous.



Exercice 2.
On donne le tableau de variation d'une fonction f :

x	-4		-2		1		3
f	-3	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1

Pour chacune des propositions suivantes, dire, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

(a) pour tout réel x tel que $-4 \leq x \leq 3$, on a $f(x) \leq 2$;

(b) il existe un réel x dans $[-4\,;\,1]$ tel que $f(x) \geq 0$;

(c) pour tout réel x tel que $-4 \leq x \leq 3$ on a $f(x) \geq -4$;

(d) il existe un réel x de $[-4\,;\,1]$ tel que $f(x) \leq -4$;

(e) pour tout réel x tel que $-2 \leq x \leq 3$ on a $f(x) \leq 0$.

Exercice 3.
Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$. On sait que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,3]$ et qu'elle est strictement croissante sur $[3\,;\,+\infty[$. De plus $f(3) = 2$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) > 0$. Justifier à l'aide le la définition 1 du cours.

Exercice 4.
Soit f un fonction numérique définie sur $[-5\,;\,5]$. On sait que :
– la fonction f est croissante sur $[-3\,;\,0]$ et sur $[2\,;\,5]$;
– elle est décroissante sur les autres intervalles de son ensemble de définition ;
– le maximum de f est 7, son minimum est -3 ;
– on a $f(5) = 5$ et -5 est un antécédent de 6 ;
– la fonction f s'annule en 2.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Tracer dans un repère une courbe pouvant être la courbe représentative de f.

3 Extremums

Exercice 5.
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 5$.

1. Calculer les images de tous les entiers compris entre -5 et 2. Regrouper les résultats dans le tableau de valeurs ci-dessous :

x								
$f(x)$								

2. Placer les points correspondants à chaque couple $(x\,;\,f(x))$ dans un repère. (unités : 1 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée), puis tracer l'allure de la courbe représentative de $\mathscr{C}_f$.
3. Quel semble être le minimum atteint par la fonction f ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?
4. Exprimer $f(x)-1$ en fonction de x et factoriser l'expression obtenue. En déduire la confirmation du résultat conjecturé à la question précédente.

5. On se fixe $a \in]-\infty\,;\,-2]$ et $b \in]-\infty\,;\,-2]$ tels que $a < b$.
   a. Exprimer $f(b) - f(a)$ en fonction de a et b. Factoriser par $(b - a)$.
   b. Que peut-on dire du signe de $b - a$? et de $a + b + 4$? En déduire le signe de $f(b) - f(a)$, puis les variations de f sur $]-\infty\,;\,-2]$.
   c. Effectuer la même étude sur $[-2\,;\,+\infty[$. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 6 (On pourra s'inspirer de l'exercice précédent)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x - 2$.

1. Montrer que -11 est le minimum de f sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que f est décroissante sur $]-\infty\,;\,3]$ et croissante sur $[3\,;\,+\infty[$.

Exercice 7 (d'après le concours kangourou 2003)**.**
Un vendeur de kangourous en peluche a remarqué les faits suivants :
– si le prix d'un kangourou est de 75 €, il vend 100 kangourous par semaine ;
– chaque fois que le prix est augmenté de 5 €, il vend 20 kangourous de moins par semaine ;
– chaque fois que le prix est diminué de 5 €, il vend 20 kangourous de plus par semaine ;
– un kangourou lui revient à 30 €.
Quel est le prix de vente qui rend le bénéfice maximal ?

4 Fonctions définies par morceaux

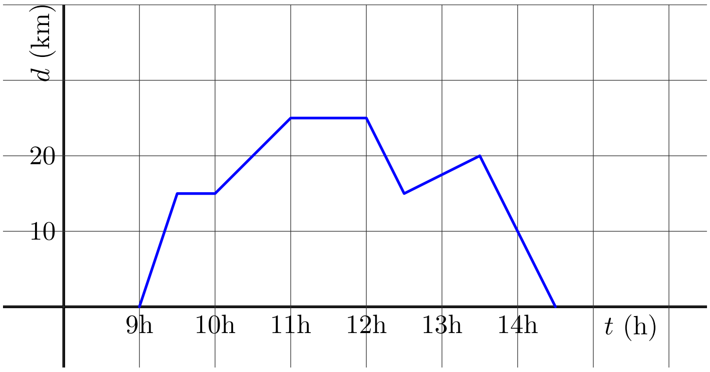
Exercice 8.
On donne l'algorithme 5 à la page 14. Compléter le tableau de valeurs obtenu en appliquant cet algorithme puis tracer la courbe représentative de la fonction associée à cet algorithme dans un repère.

x	-4	$-3{,}5$	-3	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	3	$3{,}5$	4
$f(x)$															

```
Entrées : Saisir x compris entre −4 et 4;
début
    si x ≤ −2 alors
        Calculer le double de x;
        Ajouter 8 au résultat précédent;
    sinon
        si x ≤ 2 alors
            Calculer le carré de x;
        sinon
            Calculer l'opposé du double de x;
            Ajouter 8 au résultat précédent;
fin
Résultat : Afficher f(x) = : le résultat du dernier calcul;
```

Algorithme 5 : Par morceaux. . .

Exercice 9.
Un cyclotouriste de déplace sur une route rectiligne. Le graphique ci-dessous donne la distance d en km entre ce cyclotouriste et son point de départ en fonction du temps t en heures.



1. Au cours de quelle(s) période(s) le cyclotouriste s'éloigne-t-il de son point de départ ?
2. Au cours de quelle(s) période(s) s'en rapproche-t-il ?
3. Comment interpréter les périodes de 9h30 à 10h et de 11h à 12h ?
4. À quelle distance maximale s'est-il éloigné de son point de départ ?
5. Quelle est sa vitesse moyenne entre 10h et 11h ? Entre 14h et 14h30 ?
6. Représenter graphiquement la distance parcourue en fonction du temps.

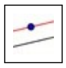
Exercice 10.
On considère un carré $ABCD$ de côté 4 cm. M est un point de la demi-droite $[AB)$. On pose $AM = x$ et N est le point de $[AD)$ tel que $AN = x$.
On coupe le carré suivant le droite (MN) et on ne conserve que la partie extérieure au triangle AMN. On appelle $S(x)$ l'aire de cette partie restante.

1. Faire une figure dans chacun des cas suivants :
   – si $x < 4$; – si $4 < x < 8$; – si $x > 8$.
2. Exprimer $S(x)$ en fonction de x (on pourra distinguer les trois cas précédents).
3. Représenter graphiquement la fonction S dans un repère.

5 Géométrie dynamique

Nous allons dans cette partie utiliser le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra disponible gratuitement à l'adresse www.geogebra.org. Un petit mode d'emploi est disponible sur le site reymarlioz.free.fr dans la rubrique « pour tous ».

Exercice 11.
ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ cm et $AC = 3$ cm. M est un point du segment $[AC]$ et on note t la distance CM. N et P sont les points de $[BC]$ et $[AB]$ tels que $AMNP$ soit un rectangle.
L'objectif de cet exercice est de déterminer la position de M pour que l'aire du rectangle $AMNP$ soit la plus grande possible.

1. **Étude préliminaire avec PC**[1]
   a. Faire une figure.
   b. Déterminer la longueur MN en fonction de t.
   c. En déduire l'aire $S(t)$ du rectangle $AMNP$ en fonction de t.
   d. Calculer cette aire pour plusieurs valeurs de t.
2. **Étude avec GeoGebra**
   Une fois le logiciel démarré, l'écran est divisé en trois fenêtre : au gauche, la fenêtre *algèbre* où sont résumés les objets créés, à droite la fenêtre *feuille de travail* où la construction géométrique est tracée et en bas la fenêtre *ligne de saisie* où on recopiera les *commandes* écrite sur cette fiche en `caractères machine à écrire`.
   Au fur et à mesure des constructions, on pourra effacer les noms des objets sur la feuille de travail en cliquant-droit sur l'objet et en déselectionnant l'option *afficher l'étiquette*.
   a. Nous allons placer les points $A(-5;1)$, $B(-1;1)$ et $C(-5;4)$ dans le repère grâce aux commandes `A=(-5,1)`, puis `B=(-1,1)` et `C=(-5,4)` (attention le séparateur de coordonnées et une virgule et non pas un point-virgule). En cliquant sur l'icône *segment* , créer dans cet ordre les segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ à la souris.
   b. Placer un point M sur le segment $[AC]$ par la commande `M=Point[b]`. À noter qu'en commençant à écrire `po`, la commande `point[]` s'affiche automatiquement ; il suffit alors d'appuyer sur `Entrée` au clavier pour que le curseur se place entre les deux crochets !
   c. Tracer la parallèle à (AB) passant par M en cliquant successivement sur l'icône , sur le segment $[AB]$ puis sur M.
   Grâce à la commande `N=intersection[d,c]`, on créé le point N.
   d. Recommencer l'étape précédente pour créer la droite e parallèle à (AC) passant par N puis P qui est l'intersection de cette droite e et du segment a.
   e. Construire le rectangle $AMNP$ par la commande `R=polygone[A,M,N,P]`. Le rectangle est alors colorié[2] et dans la fenêtre, on peut observer « `R=2.95` » où 2,95 est l'aire du rectangle. Déplacer M sur $[AC]$, le rectangle « bouge » et l'aire varie.
   Quelle semble être la plus grande valeur possible atteinte par l'aire de ce rectangle ?
   f. Pour se rapprocher de l'étude « théorique » de la question 1, on créé la variable t égale à la longueur du segment CM grâce à la commande `t=segment[C,M]`.
   Ainsi, à chaque valeur de t on associe un autre nombre R qui est l'aire du rectangle $AMNP$: on a défini une fonction *aire* sur l'intervalle $[0\,;\,3]$ (car le segment CM a une longueur comprise entre 0 et 3).
   À chaque couple (t, R) on peut associer un point T dans le repère grâce à la commande `T=(t,R)`. Cliquer-droit sur le point T et sélectionner l'option *trace activée*. L'ensemble des positions des points T constitue la *représentation graphique* de la fonction *aire*.
   Déterminer alors graphiquement la valeur de t pour laquelle l'aire est la plus grande.
   g. Pour terminer, vérifier que l'expression trouvée à la question 1c nous donne bien la même représentation graphique en écrivant la commande `S(x)=...` en remplaçant les `...` par l'expression trouvée alors.

1. PC = Papier - Crayon...
2. On peut changer de couleur en cliquant droit dessus et en choisissant *propriétés*. On peut aussi masquer les droites d et e en cliquant-droit dessus et en déselectionnant l'option *afficher l'objet*.

3. **Démonstration**
   On a $S(t) = -\frac{4}{3}t^2 + 4t$ et la valeur maximale de cette fonction semble être 3, atteinte pour $t = 1{,}5$.
   a. Exprimer $S(t) - 3$ en fonction de t et l'écrire sous la forme $S(t) - 3 = -\frac{4}{3} \times f(t)$.
   b. Factoriser $f(t)$ à l'aide d'une identité remarquable.
   c. En déduire l'expression factorisée de $S(t) - 3$.
   d. Quelle est la plus grande valeur de $S(t) - 3$? Justifier. Pour quelle valeur de t est-elle atteinte ?
   e. En déduire la plus grande valeur de $S(t)$.

Exercice 12.
Sur le même principe, résoudre à l'aide de GeoGebra le problème suivant :
ABC est un triangle rectangle isocèle en A avec $AB = AC = 4$cm. M est un point du segment $[AB]$ et N est le point du segment $[AC]$ tel que $MN = 4$cm.
Déterminer la position de M pour que l'aire du triangle AMN soit maximale.
On pourra utiliser la commande `Cercle[M,4]` qui créé le cercle de centre M et de rayon 4.

6 Complément : la parité d'une fonction

À savoir

On dit d'une fonction qu'elle est *paire* si :
– son ensemble de définition est symétrique par rapport à l'origine (i.e. si $x \in \mathscr{D}_f$ alors $-x \in \mathscr{D}_f$) ;
– sour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.
On dit d'une fonction qu'elle est *impaire* si :
– son ensemble de définition est symétrique par rapport à l'origine (i.e. si $x \in \mathscr{D}_f$ alors $-x \in \mathscr{D}_f$) ;
– pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.
Étudier la parité d'une fonction signifie « déterminer si une fonction est paire, impaire **ou ni l'un ni l'autre** [a] ».

a. Contrairement aux entiers naturels, les fonctions peuvent n'être ni paire, ni impaire !

Exercice 13.
Déterminer l'ensemble de définition puis étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x^2; \quad g : x \mapsto 3x; \quad h : x \mapsto 2x^2 + 3; \quad m : x \mapsto 3x^2 + 2x; \quad n : x \mapsto 2x^3 + x$$

$$p : x \mapsto 2\sqrt{x}; \quad q : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3}; \quad r : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}; \quad s : x \mapsto \sqrt{3x - 5}$$

Exercice 14.
Dans chacun des cas suivants, étudier la parité de la fonction f.
1. f est définie sur $[-3\,;\,5]$ par $f(x) = 3x^2 - 5$.
2. f est définie sur $]-\infty\,;\,-3] \cup [3\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x^3+x}$.
3. f est définie sur $[-4\,;\,4[$ par $f(x) = \frac{3x^2-1}{x^2+1}$.
4. f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4+3}$.

Exercice 15.
Soit f une fonction paire définie sur $[-5\,;\,5]$. On donne : $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$, $f(-3) = -1$, $f(-4) = 0$ et $f(-5) = 3$.

1. Dresser un tableau de valeurs de la fonction f pour tous les x entiers compris entre -5 et 5.
2. Placer les points correspondants dans un repère orhogonal et tracer l'allure de la courbe représentant la fonction f.
3. Que constate-t-on ? Justifier.

Exercice 16.
Soit f une fonction impaire définie sur $[-5\,;\,5]$. On donne : $f(1) = 2$, $f(2) = 0$, $f(-3) = 1{,}5$, $f(-4) = 2$ et $f(-5) = 0$.

1. Combien vaut $f(0)$? Justifier.
2. Dresser un tableau de valeurs de la fonction f pour tous les x entiers compris entre -5 et 5.
3. Placer les points correspondants dans un repère orthogonal et tracer l'allure de la courbe représentant la fonction f.
4. Que constate-t-on ? Justifier.

Chapitre 4

Vecteurs du plan

1 Activité : GeoGebra

1.1 Translation et vecteur

Dans cette partie nous allons découvrir une nouvelle transformation et la façon de la caractériser grâce à un nouvel objet mathématique : le *vecteur*.

1. Lancer le logiciel GeoGebra et, en cliquant droit sur la fenêtre « dessin », effacer les axes.
2. Placer trois points distincts A, B, M (on peut cliquer-droit sur le troisième point pour le renommer).
3. Construire le point I milieu de $[BM]$ et placer ensuite le point M' tel que I soit aussi le milieu de $[AM']$.
4. Construire les segments $[AB]$ et $[MM']$. Déplacer successivement les trois points et indiquer ci-dessous *tout* ce qu'on peut constater :

5. Placer maintenant deux autres points N et P et construire le triangle MNP.
6. Recommencer deux fois la construction faite à la question 3 en remplaçant successivement M par N puis par P pour obtenir les points N' et P'.
7. Construire le triangle $M'N'P'$ ainsi que les segments $[NN']$ et $[PP']$.
8. Déplacer le point B et observer.

À savoir

On dit que les points M', N' et P' sont les images respectives de M, N et P par la *translation* qui transforme A en B.
Ainsi, une translation est un glissement suivant une *direction* (ici la droite (AB)), dans un *sens* (ici de A vers B) et d'une certaine *longueur* (ici la longueur AB).
L'objet mathématique qui caractérise une translation est appelé *vecteur* il est défini par une direction, un sens sur cette direction et une longueur aussi appelée norme. On le note $\vec{u}$. Dans le cas présent le vecteur est noté $\overrightarrow{AB}$.

1.2 Définition et propriétés

1. En utilisant la façon dont on a construit le point M' à la question 3 de la partie 1.1 de la page 19, donner une définition de l'image M' de M par la translation qui transforme A en B :

2. Que peut-on alors dire du quadrilatère $ABM'M$? Justifier.
3. Expliquer ce que signifie « les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MM'}$ ont la même direction, le même sens et la même longueur ».

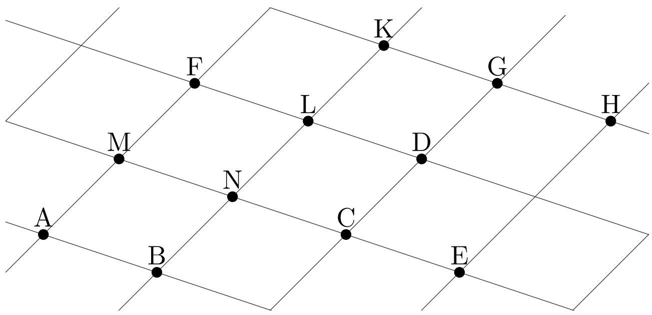
À savoir

On dit alors que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont égaux.

2 Translations

Exercice 1.
La figure ci-dessous est constituée de parallélogrammes.

1. Dans chaque cas, déterminer l'image du point par la translation proposée puis écrire le nom du parallélogramme associé :
   – l'image de L par la translation qui transforme G en C ;
   – l'image de N par la translation qui transforme B en D ;
   – l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{HL}$;



2. Placer l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$.
3. Placer l'image de L dans la translation qui transforme C en M.

Exercice 2.
Pour chaque question, dire si chaque proposition est vraie ou fausse. Justifier.

1. $ABCD$ est un parallélogramme de centre I. Alors :
   (a) l'image de A par la translation qui transforme C en D est B ;
   (b) l'image de D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ est I ;
   (c) $CBAD$ est un parallélogramme.
2. La translation qui transforme E en F transforme aussi H en P. Alors :
   (a) $EFHP$ est un parallélogramme ;
   (b) $HPFE$ est un parallélogramme ;
   (c) la translation qui transforme E en H transforme aussi F en P.

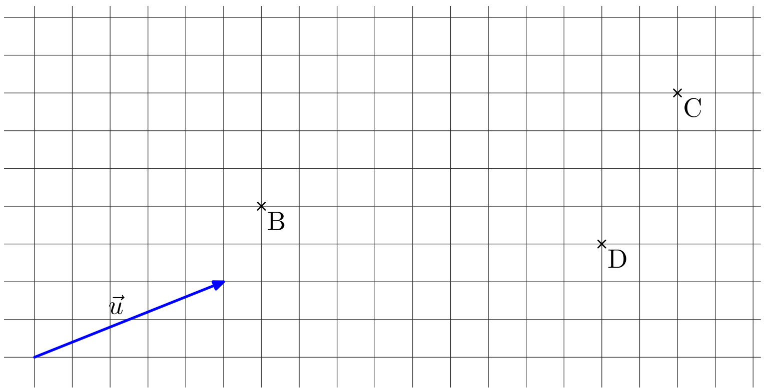
3 Vecteur et représentants

Rappel

Un vecteur est un objet mathématique caractérisé par une direction, un sens et une longueur aussi appelée norme.
Une direction est donnée par une droite. Toutes les droites parallèles ont la même direction.
Un sens sur une droite est determiné par deux points A et B de la droite : on a alors le sens de A vers B et le sens de B vers A.
Attention : un vecteur n'a pas une position dans le plan (il n'est pas à « un endroit » précis). Lorsqu'on souhaite « dessiner » un vecteur, on en trace un *représentant* sous la forme d'un segment fléché. Un vecteur a une infinité de représentants. Pour chacun d'eux, le départ de la flèche est appelé *origine* du représentant et l'arrivée est appelée *l'extrémité* du représentant.

Exercice 3.
Sur la figure ci-après on a tracé un représentant d'un vecteur $\vec{u}$.

1. Tracer le représentant de $\vec{u}$ d'origine B ; on note B' son extrémité.
2. Tracer le représentant de $\vec{u}$ d'extremité C. Même question pour D. On note respectivement C' et D' leurs origines.
3. Compléter : $\vec{u} =$
4. Tracer le représentant de $\overrightarrow{CD}$ d'extremité B.
5. Tracer le représentant de $\overrightarrow{DB}$ d'origine C.



Exercice 4.
En utilisant la figure de l'exercice 1 page 20, donner dans chaque cas plusieurs représentants des vecteurs proposés en utilisant uniquement les points de la figure :

$$\overrightarrow{AL}; \quad \overrightarrow{MB}; \quad \overrightarrow{NH}; \quad \overrightarrow{EB}; \quad \overrightarrow{HF}$$

4 Égalité de vecteurs

Exercice 5.
Soit A et B deux points du plan.

1. Placer le point C tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. Que peut-on dire de B pour $[AC]$? Justifier.
2. Placer le point M milieu de $[AB]$. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MB}$? Justifier.

3. Énoncer une propriété dans laquelle figure l'expression *si et seulement si* et résumant les deux questions précédentes.

Dans les deux exercices qui suivent, on pourra utiliser la propriété énoncée à la question 3 de l'exercice 5

Exercice 6.
Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O tel que $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm et $AC = 6$ cm.

1. Faire une figure.
2. Compléter les égalités vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{AB} = \dots \qquad \overrightarrow{AO} = \dots \qquad \overrightarrow{CB} = \dots \qquad \overrightarrow{BO} = \dots$$

3. Placer le point E tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$. Construire le point F symétrique de B par rapport à C.
   a. Démontrer que C est le milieu de $[DE]$.
   b. Démontrer $DBEF$ est un parallélogramme.

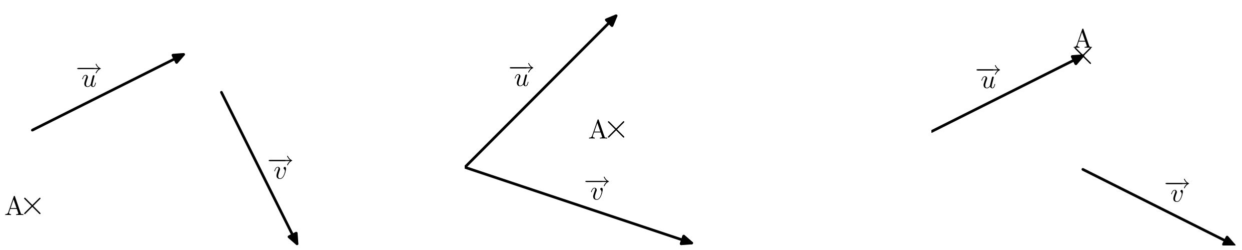
Exercice 7.
Soit A et B deux points du plan. Dans chacun des cas suivants, indiquer si on peut affirmer que C est le milieu du segment $[AB]$. Dans le cas contraire, que permet d'affirmer l'égalité proposée ?

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}; \quad \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}; \quad \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB}; \quad \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}; \quad \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}; \quad ||\overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{CB}||$$

5 Somme de vecteurs

La somme de deux vecteurs est un vecteur dont un représentant est obtenu comme suit :
– on trace un représentant du premier vecteur d'origine A et d'extrémité P ;
– on trace un représentant du deuxième vecteur d'origine P [1] et d'extremité B ;
– la somme des deux vecteurs est alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 8.
Construire un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$ d'origine A dans chacun des cas suivants :



Exercice 9.
$ABCD$ est un parallélogramme et E est un point du plan.

1. Le même P qu'à l'étape précédente !

1. En utilisant la relation de Chasles, compléter pour obtenir un vecteur défini par un de ses représentants :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\ \ldots\ldots;\quad \overrightarrow{AD}+\ldots\ldots=\overrightarrow{AE};\quad \overrightarrow{CE}+\ldots\ldots=-\overrightarrow{AC};\quad \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{E\ldots}=\overrightarrow{\ldots D}$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\ \ldots\ldots;\quad \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BE}=\ldots\ldots;\quad \ldots\ldots+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}$$

2. Écrire un représentant de chacun des vecteurs suivants :

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE};\quad \vec{v}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE};\quad \vec{w}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}$$

6 Multiplication par un réel

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et λ un réel non nul. Le vecteur $\lambda\vec{u}$ est le vecteur qui a :
– la même direction que $\vec{u}$;
– le même sens que $\vec{u}$ si $\lambda > 0$ et le sens contraire de $\vec{u}$ si $\lambda < 0$;
– une norme égale à $|\lambda| \times ||\vec{u}||$.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs et λ et μ sont deux réels, alors :

$$(\lambda+\mu)\vec{u}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{u};\qquad \lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v};\qquad \lambda(\mu\vec{u})=(\lambda\mu)\vec{u}$$

Exercice 10.
Simplifier le plus possible les expressions suivantes :

$$2\vec{u}+3(\vec{u}+\vec{v})-5\vec{v};\qquad 3(\vec{u}-2\vec{v})+5(2\vec{v}-3\vec{u});\qquad 2(3\vec{u}-4\vec{v})+8(\vec{v}-\vec{u})+2\vec{u}$$

Exercice 11.
$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.

1. Exprimer uniquement en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{u_1}=\overrightarrow{BC};\qquad \overrightarrow{u_2}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC};\qquad \overrightarrow{u_3}=3\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB};\qquad \overrightarrow{u_4}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}.$$

2. Exprimer uniquement en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$:

$$\overrightarrow{v_1}=2\overrightarrow{CD};\qquad \overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA};\qquad \overrightarrow{v_3}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{OC};\qquad \overrightarrow{v_4}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_3}+\overrightarrow{u_4}.$$

7 Configurations géométriques

L'utilisation des vecteurs permet de résoudre (entre autres) des problèmes de parallélisme et d'alignements. Pour cela on utilise les propriétés suivantes :
– les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ;
– les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice 12.
ABC est un triangle quelconque. E et F sont les points définis par $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AC}$.
Démontrer que (CE) et (FB) sont parallèles.

Exercice 13.
$ABCD$ est un parallélogramme. Les points E et F sont définis par $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$. Les points G et H sont tels que $BAEG$ et $BAFH$ soient des parallélogrammes.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DF}$ et que $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DE}$.
3. En déduire que les points C, G et H sont alignés.

Exercice 14.
ABC est un triangle quelconque. Les points D et E sont définis par $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure et construire D et E.
2. Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire que les points A, D et E sont alignés.

8 Avec des coordonnées

Exercice 15.
On se place dans un repère orthonormé $(O; I, J)$. On donne $A(-2; 5)$, $B(3; 2)$, $C(-3; -8)$ et $D(-8; -5)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer la nature précise de $ABCD$.
3. Soit E le point tel que $BACE$ soit un parallélogramme. En utilisant des vecteurs égaux, déterminer les coordonnées de E.

Exercice 16.
On se place dans un repère $(O; I, J)$. On donne $A(-1; 3)$, $B(4; -1)$ et $C(2; 2)$.

1. Déterminer les coordonnées de P tel que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BC}$.
2. Déterminer les coordonnées de Q tel que $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{CA}$.
3. Déterminer les coordonnées de S tel que $\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

Exercice 17.
On donne $A(2; -3)$, $B(5; 6)$, $C(-3; 1)$ et $D(-5; 14)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.
3. Même question pour $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Déterminer les coordonnées du point I milieu de $[BC]$.
5. Déterminer les coordonnées du point J tel que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IJ}$.
6. Soit M un point de l'axe des abscisses. Déterminer toutes les abscisses possibles de M telles que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IM}$ soient colinéaires.

Chapitre 5

Fonctions affines

On rappelle qu'une fonction f est affine si l'expression algébrique de $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = mx + p$. Une fonction affine f est linéaire si le coefficient p (l'ordonnée à l'origine) est nul.

1 Déterminer une fonction affine

Déterminer une fonction affine c'est trouver les coefficients m et p de l'expression $f(x) = mx + p$.
Exercice 1.

1. Déterminer la fonction affine f telle que $f(2) = 3$ et $f(4) = 2$.
2. Déterminer la fonction affine g telle que $g(-2) = 2$ et $g(3) = -1$.
3. Déterminer la fonction affine h telle que l'image de 3 est 4 et l'antécédent de 2 est 6.

Exercice 2.
Un cycliste se déplace à vitesse constante sur une route entre deux villes A et B distantes de 81 km. On admet que la distance entre le cycliste et la ville A est une fonction affine du temps ; on note $f(t)$ la distance entre A et le cycliste t heures après midi.
À 14 heures, cette distance vaut 48 km et à midi elle valait 12 km.

1. Déterminer la fonction affine f sous la forme $f(t) = mt + p$.
2. Quelle est la signification physique de m ? de p ?
3. À quelle heure est-il parti de A ? À quelle heure arrivera-t-il à B ?

Exercice 3.
Compléter le tableau suivant par « Vrai » ou « Faux » :

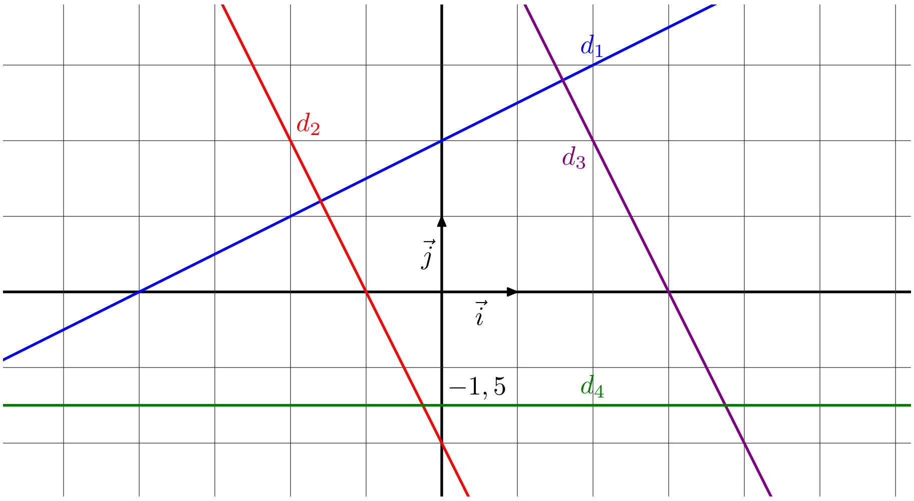
Fonction f déf par	f est affine	f est linéaire	f est constante
$f(x) = (x+3)(x-5)$			
$f(x) = 3(x+2) - 5x$			
$f(x) = (x+3)(x-3) - x^2$			
$f(x) = 2(x+3)^2 - 2(x+3)(x-3)$			
$f(x) = 0$			
$f(x) = \sqrt{3}x + \frac{5}{4}$			
$f(x) = \sqrt{3x + \frac{5}{4}}$			

2 Représentation graphique

Exercice 4.
Tracer dans un même repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les représentations graphiques des fonctions affines définies ci-dessous :

$$f : x \mapsto x + 3; \quad g : x \mapsto -\frac{3}{2}x + 2; \quad h : x \mapsto \frac{1}{2}x - 4; \quad p : x \mapsto 2{,}5; \quad q : x \mapsto -\frac{1}{2}x + 4$$

Exercice 5.
Déterminer la fonction affine associée à chacune des droites tracées ci-dessous.



3 Signe d'une fonction affine

Exercice 6.
Dresser le tableau de signes des fonctions affines f et g définies par $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = 5 - 3x$.

Exercice 7.
Étudier le signe de chacune des fonctions définies dans l'exercice 4

4 Quelques algorithmes

Exercice 8.

1. Écrire l'algorithme qui donne l'expression algébrique de $f(x)$ si f est une fonction affine dont on connaît deux nombres a et b et leurs images $u = f(a)$ et $v = f(b)$.
2. Traduire cet algorithme en langage Xcas.
3. Appliquer ce programme à l'exercice 1.

Exercice 9.

1. Écrire l'algorithme qui donne l'expression algébrique de $f(x)$ si f est une fonction affine dont on connaît deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ de la représentation graphique.
2. Traduire cet algorithme en langage Xcas.
3. Appliquer ce programme à l'exercice 5.

Chapitre 6

Équations

1 Équations et solutions

Exercice 1.
Pour chaque équation, déterminer (en justifiant par un calcul) si les nombres proposés sont des solutions :

1. $2x + 5 = 0$, $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{2}{5}$, $c = 3$, $d = -\frac{5}{2}$.
2. $3x + 2 = 7x - 3$, $a = 2$, $b = 0$, $c = 0{,}8$, $d = 1{,}25$
3. $2x + 3 = 1 - x$, $a = 0$, $b = -0{,}67$, $c = \frac{2}{3}$, $d = -\frac{2}{3}$.
4. $x^2 - 2 = 0$, $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2} + 1$, $c = 3 - \sqrt{5}$, $d = -\sqrt{2}$, $e = \sqrt{2}$.
5. $x^2 + 3x + 1 = 0$, $a = \sqrt{5}$, $b = -1$, $c = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$, $d = \frac{2}{3}$.
6. $2x^2 - 6x + 3 = 0$, $a = 2$, $b = \sqrt{5}$, $c = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $d = \frac{6-\sqrt{12}}{4}$.

Exercice 2.
Soit f une fonction numérique. Écrire un algorithme qui détermine si un nombre a est solution de l'équation $f(x) = 0$.

2 Équations du premier degré

Exercice 3.
Les équations suivantes sont-elles du premier degré ? Justifier.

(a) $2x^2 - 5x + 3 = (2x + 1)^2$
(b) $2(x + 2)(x - 2) = (2x + 5)^2$
(c) $3x(x - 4) = 3(x - 5)^2$
(d) $(x+3)(3-2x)+2(x+1)^2 = 0$
(e) $(2x + 3)(5 - x) = 0$
(f) $2(3x-5)+4x-7(x+1) = x$

Exercice 4.
Résoudre les équations suivantes :

(a) $2x + 3 = 5$
(b) $-2x + 6 = x - 7$
(c) $-5x + 3 = -3x + 5$
(d) $2x - 4(x + 3) = 7x + \sqrt{2}$
(e) $\frac{1}{3}x + 2 = 5$
(f) $\frac{2}{5}x + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$
(g) $\frac{2x-3}{7} = 1$
(h) $\frac{5x}{3} + 1 = 7$
(i) $\frac{1}{3}(x - 2) + 2x = 0$

3 Équation produit

Exercice 5.
Résoudre les équations suivantes :

(a) $(x+3)(x-4)=0$
(b) $(5x-4)(3-2x)=0$
(c) $x^2-5=0$
(d) $x^2-3x=0$
(e) $2x^2-4=0$
(f) $(-3x+1)(x-4)=2x(x-4)$
(g) $(1-3x)^2=4$
(h) $(x+3)(5-x)+x^2+6x+9=0$
(i) $4x^2-12x=-9$

Exercice 6.
Pour $x \in \mathbf{R}$ on pose $A(x)=4(x+1)^2-9$

1. Développer et réduire $A(x)$.
2. Factoriser $A(x)$.
3. Résoudre les équations suivantes :

   (a) $A(x)=0$
   (b) $A(x)=-9$
   (c) $A(x)=-5$

4. On pose $B(x)=\frac{A(x)}{1-x}$.
   a. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $B(x)$ existe.
   b. Résoudre $B(x)=0$.

4 Problèmes

Exercice 7.
ABC est un triangle rectangle en B tel que $AB=4$ et $AC=5$. M est un point de la droite (AB) qui n'est pas sur $[AB)$ et N est le point de (AC) tel que (MN) est perpendiculaire à (AB). On note x la distance AM.

1. Faire une figure (unité : le cm).
2. Montrer que (BC) et (MN) sont parallèles.
3. Calculer BC, puis exprimer MN en fonction de x.
4. Démontrer que l'aire du quadrilatère $BCMN$ s'exprime en fonction de x par l'expression $\mathscr{A}(x)=\frac{3}{8}(x^2+8x+16)$. Factoriser $\mathscr{A}(x)$.
5. Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de $BCMN$ est égale à $\frac{27}{2}$.

Exercice 8.

1. Yves retranche 6 de son âge et double le nombre obtenu. Il obtient le même résultat s'il ajoute 25 à son âge. Quel âge a-t-il ?
2. Une bouteille et son bouchon coûtent 1€. La bouteille coûte 0,90€ de plus que le bouchon. Combien coûte le bouchon ? Et la bouteille ?
3. La longueur d'un rectangle est le double de sa largeur. Son aire est de 450 m^2. Quelles sont ses dimensions ?
4. J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai, la somme de nos âges sera de 90 ans. Quel âge avons nous ?

Chapitre 7

Droites du plan

1 Équations de droites

Exercice 1.
Réduire chacune des équations suivantes sous la forme $y = mx + p$ ou $x = k$.

(a) $2x - 5y + 3 = 0$

(b) $4x + 2y - 7 = 0$

(c) $-x - y = 7$

(d) $x = 7 - 3y$

(e) $2(x + y) + 1 = 2y$

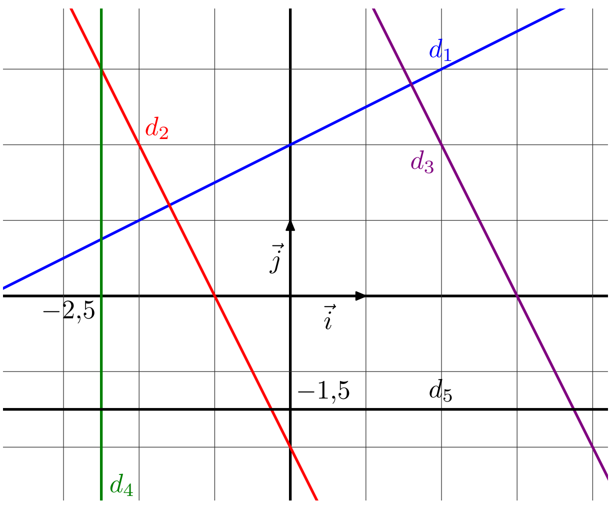
(f) $-3x - 2y + 4 = 0$

Exercice 2.
Dans chaque cas, tester par un calcul si le point appartient à la droite et compléter le tableau par oui ou non.

	$A(3;1)$	$B(4;3)$	$C(5;5)$	$D(3;3{,}5)$	$E(0;4)$
$y = 2x - 5$					
$3x - 4y + 5 = 0$					
$x = 4$					
$x = 2y - 4$					

Exercice 3.
On donne $A(2;3)$, $B(5;2)$, $C(-2;4)$, $D(3;-1)$ et $E(-2;-2)$ dans un repère. Déterminer l'équation réduite de chacune des droites (AB), (AC), (BD), (BC) et (EC).

Exercice 4.
Déterminer graphiquement l'équation réduite de chacune des droites d_1, d_2, d_3, d_4 et d_5.
Dans chaque cas, on donnera les explications précises de la méthode employée.



Exercice 5.

1. Dans un repère orthonormé, tracer les droites dont on donne les équations ci-dessous :
   $d_1 : y = \frac{1}{3}x + 2;\quad d_2 : y = -x - 1;\quad d_3 : x = 3;\quad d_4 : y = 3 - \frac{1}{2}x$
2. Déterminer l'équation de la droite d_5 parallèle à d_1 et passant par $A(2;-1)$.
3. On considère l'équation à deux inconnues suivante : $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - 1 = 0$. Écrire cette équation sous la forme d'une équation réduite de droite et tracer cette droite.

Exercice 6.
Dans chaque cas, déterminer l'équation réduite de la droite passant par le point proposé et dont la direction est donnée par le vecteur donné :
– la droite d passe par $A(2;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2;1)$;
– la droite δ passe par $B(-3;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(1;-1)$;
– la droite D passe par $C(-3;2)$ et de vecteur directeur $\vec{w}(-3;-2)$;
– la droite Δ passe par $E(0;-4)$ et de vecteur directeur $\vec{z}(-\frac{1}{2};\frac{1}{3})$;

Exercice 7 (bilan)**.**
Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soient A, B et C les points de coordonnées respectives $(-1;-3)$, $(2;3)$ et $(2;-6)$. On fera une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Déterminer les équations réduites des droites (AB), (AC) et (BC).
2. Les points suivants appartiennent-ils à la droite (AB) ? (*Justifier par un calcul*)
   (a) $E(5;9)$
   (b) $F(-17;-30)$
   (c) $G(\frac{5}{7};\frac{1}{2})$
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite (AB) avec les axes du repère.
4. Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathcal{D}_1$ parallèle à (AB) passant par C.
5. Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathcal{D}_2$ parallèle à (AC) passant par B.
6. Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathcal{D}_3$ perpendiculaire à (BC) passant par A.
7. Tracer la droite Δ_1 passant par A et de coefficient directeur 2.
8. Tracer la droite Δ_2 passant par B et de coefficient directeur -3.
9. Tracer la droite Δ_3 passant par C et de coefficient directeur 0,5.

2 Systèmes linéaires

Exercice 8.
Pour chaque système proposé, déterminer s'il a une unique solution puis le résoudre graphiquement :

$$\begin{cases} 2x + \frac{1}{3}y = 5 \\ \frac{3}{2}x + 3y = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x - 3y = \frac{3}{2} \\ -x + 0{,}6y = -3 \end{cases}$$

3 Problème

Exercice 9.
Trois taxis T_1, T_2 et T_3 proposent leurs tarifs :

T_1 : 5 € de prise en charge, puis 0,40 € du kilomètre.
T_2 : 4 € de prise en charge, puis 0,50 € du kilomètre.
T_3 : 7 € de prise en charge, puis 0,30 € du kilomètre.

1. Si un client se présente et désire effectuer un trajet de 5 km, quel taxi devrait-il prendre ? et pour un trajet de 15 km ?
2. On note x la distance que veut parcourir un client en taxi. Exprimer les tarifs $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ des trois taxis T_1, T_2 et T_3 en fonction de x.
3. Représenter graphiquement les trois droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ représentant respectivement les trois fonctions f_1, f_2 et f_3 (soyez précis !).
4. En vous basant uniquement sur le graphique, indiquez pour quelles distances il est plus intéressant de prendre le taxi T_1, le taxi T_2, ou le taxi T_3. (les réponses à ces questions seront données sous forme d'intervalles).

4 Géométrie dynamique

Exercice 10.
Soit $\mathscr{H}$ la courbe représentative de la fonction[1] $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ dans un repère orthonormé. On note P le point de coordonnées $(1;1)$ et A le point de $\mathscr{H}$ d'abscisse a où a est un réel non nul différent de 1. On note d la droite passant par A et parallèle à l'axe des ordonnées et on note A' le symétrique de A par rapport à d.

1. **Avec GeoGebra**
   a. Construire la figure en respectant les consignes ci-dessous :
   – on commencera par créer un curseur a prenant ses valeurs dans $[-5;5]$ par pas de 0,1 ;
   – saisir `f(x)=1/x` pour tracer $\mathscr{H}$;
   – placer le point P ;
   – placer le point A par ses coordonnées dépendant de a ;
   – ...

   b. Tracer ensuite la droite $(A'A)$ et faire varier le curseur a.

   c. Que remarque-t-on pour cette droite ? Appeler votre professeur de maths préféré pour valider cette observation.
2. **Démonstration** : on se place dans le cas où $a \neq 1$.
   a. Quelles sont les coordonnées de A en fonction de a ?

   b. Exprimer les coordonnées de A' en fonction de a.

   c. La droite (AA') peut-elle être parallèle à (Oy) ? Justifier.

   d. En déduire la forme générale de l'équation réduite de $(A'A)$.

   e. Déterminer son coefficient directeur en fonction de a puis son ordonnée à l'origine.

   f. Calculer l'ordonnées du point de $(A'A)$ d'abscisse -1. Conclure.

1. Nous verrons par la suite que cette fonction s'appelle la fonction inverse et que sa courbe représentative est une *hyperbole* (d'où son nom $\mathscr{H}$...).

5 Prolongement : inéquations à deux inconnues

Exercice 11.
Soit d la droite d'équation $y = 3$ et doit δ la droite d'équation $y = x + 2$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Tracer les droites d et δ.
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des points $M(x; y)$ du plan dont les coordonnées vérifient $y \geq 3$ (hachurer la partie du plan qui ne convient pas).
3. On considère l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points $M(x; y)$ du plan dont les coordonnées vérifient l'inéquation $y \leq x + 2$.
   a. Déterminer l'ensemble des points de $\mathscr{E}_2$ qui ont pour abscisse 0.
   b. Même question avec 2 pour abscisse.
   c. Même question avec a pour abscisse où a est un réel quelconque.
   d. En déduire l'ensemble $\mathscr{E}_2$ (hachurer la partie du plan qui ne convient pas).

Exercice 12 (Programmation linéaire)**.**
Étudions le problème suivant : « Deux ouvriers A et B travaillent à temps partiel dans un atelier qui fabrique des pièces P et des pièces Q. L'ouvrier A est payé 9 € de l'heure et produit 10 pièces P et 4 pièces Q par heure. L'ouvrier B est payé 10 € de l'heure et fabrique 5 pièces P et 7 pièces Q par heure.
L'atelier reçoit une commande de 50 pièces ou plus de chaque type et ne peut pas consacrer plus de 11 heures à leur fabrication (somme des heures de travail des ouvriers A et B).
Comment répartir le travail entre A et B pour que le coût en salaires soit minimum ? »
On note x le nombre d'heures de travail de A et y le nombre d'heure de travail de B.

1. Quelles valeurs peuvent prendre x et y ?
2. Exprimer en fonction de x et de y le nombre P de pièces de type P fabriquées.
3. Exprimer en fonction de x et de y le nombre q de pièces de type Q fabriquées.
4. Expliquer alors pourquoi x et y doivent vérifier le système suivant :

$$\begin{cases} y \geq -2x + 10 \\ y \geq -\frac{4}{7}x + \frac{50}{7} \\ y \leq -x + 11 \end{cases}$$

5. Représenter graphiquement la solution de ce système (on pourra utiliser la méthode décrite dans l'exercice 11). Expliquer à quoi correspondent les coordonnées des points de l'ensemble solution précédent [2].
6. Soit D la dépense en salaire pour la production demandée.
   a. Exprimer D en fonction de x et y.
   b. À partir de l'égalité précédente, exprimer y en fonction de x et D. Que peut-on dire de cette équation (graphiquement) ?
   c. Tracer la droite correspondant à l'équation précédente pour plusieurs valeurs de D.
   d. Déterminer (graphiquement) la droite qui a (au moins) un point dans le polygone des contraintes et pour laquelle D est minimal.
   e. Conclure.

2. Cet ensemble est appelé *polygone des contraintes*.

Chapitre 8

Statistiques : épisode 1

Dans la première partie de ce chapitre, nous étudierons à l'aide d'un tableur un fichier de données statistiques sur les communes de France. Dans la deuxième partie les exercices seront traités « à la main » ou à la calculatrice.

1 Avec un tableur

La première chose à faire est de vérifier que vous avez reçu dans votre espace personnel le fichier `CommunesDeFrance.xls` ou `CommunesDeFrance.ods` ; si ce n'est pas le cas, vous pouvez le télécharger à l'adresse http ://reymarlioz.free.fr/spip.php ?article164.

1.1 Tri. Fréquences. Graphiques

1. Ouvrir le fichier `CommunesDeFrance`
2. Dans la première feuille intitulée « 1.Tri-Freq-Graphique » observer les données. Comment les communes sont-elles triées ? Les ranger par ordre croissant de population.
3. Les communes de moins de 10 000 habitants sont recensées par roulement tous les 5 ans, pour les autres une enquête par sondage est réalisée tous les ans.
   a. Quel est le pourcentage des communes recensées par sondage ?
   b. Quel est le pourcentage de la population recensée par sondage ?
4. À l'aide du grapheur, proposer une représentation graphique de cette série statistique. Y-en a-t-il une plus satisfaisante que les autres ?

1.2 Paramètres

1. Calculer la population moyenne des communes françaises.
2. Déterminer la population médiane des communes françaises.
3. Déterminer « à la main » les premier et troisième quartiles des populations des communes françaises et compléter les phrases ci-dessous :
   - environ . . . . % des communes françaises ont une population inférieure à 427.
   - environ 25% des communes françaises ont une population inférieure à . . . .
   - environ 50% des communes françaises ont une population comprise entre . . . . . . et . . . .
   - environ 25% des communes françaises ont une population supérieure à . . . .

4. Retrouver les résultats des questions 2 et 3 avec une formule. On pourra se souvenir que les lignes du tableau vont de 2 à 36 725.

Rappel

CENTILE(A1:A20 ;0,25) donne le premier quartile de la série écrite dans la plage de cellules **A1 :A20**, et de même, **CENTILE(A1 :A20 ;0,75)** donne le troisième quartile.

1.3 Regroupements de populations

Les départements de la Savoie et de la Haute-Savoie envisagent de fusionner. Utiliser la deuxième feuille intitulée « 3.Pays de Savoie ».

1. Calculer la population moyenne d'une commune de Savoie.
2. Calculer la population moyenne d'une commune de Haute-Savoie.
3. Calculer la population moyenne d'une commune du département « fusionné ».
4. Recommencer la même étude avec la feuille intitulée « 3.Nord-PasDeCalais » pour les départements du Nord (59) et du Pas-de-Calais (62).
5. Compléter la propriété ci-dessous :

À savoir

Si une série d'effectif N_1 a pour moyenne $\overline{x_1}$ et qu'une série d'effectif N_2 a pour moyenne $\overline{x_2}$ alors la série constituée du regroupement des deux séries précédentes a pour moyenne :

$$\overline{x} = \frac{\qquad}{\qquad}$$

Rappel

pour compter le nombre de cellules de la plage **A1 :A20** dont la valeur est égale à 73 on saisit : **NB.SI(A1 :A20 ;73)**.
De même, pour additionner le contenu des cellules de la colonne B (**B1 :B20**) pour lesquelles le contenu de la cellule de la colonne A est 73 on saisit : **SOMME.SI(A1 :A20 ;73 ;B1 :B20)**

1.4 Fréquences cumulées

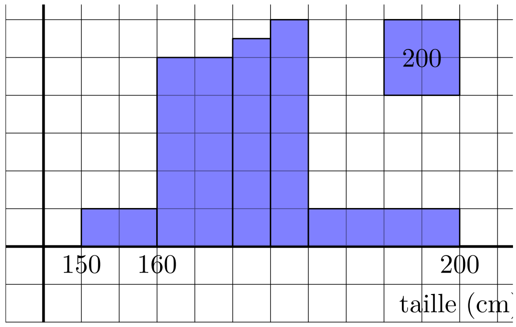
Utiliser maintenant la feuille intitulée « 4.Freq.Cumulées » grâce à laquelle nous allons étudier les populations du Rhône (69) et des Bouches-du-Rhône (13).

1. Calculer à l'aide d'une formule les populations cumulées croissantes puis les fréquences cumulées croissantes des communes des Bouches-du-Rhône.
2. Même question pour le département du Rhône.
3. Construire la courbe des fréquences cumulées croissantes du département des Bouches-du-Rhône en choisissant comme type de graphique le nuage de points avec en abscisses la population totale des communes et en ordonnées les fréquences cumulées croissantes.
4. Ajouter à ce graphique la courbe du département du Rhône.
5. Lire sur le graphique les médianes, premiers et troisièmes quartiles des deux séries.
6. Une des deux courbes est « presque » toujours en dessous de l'autre. Proposer une interprétation concrète de cette observation.

2 À la main et à la calculatrice

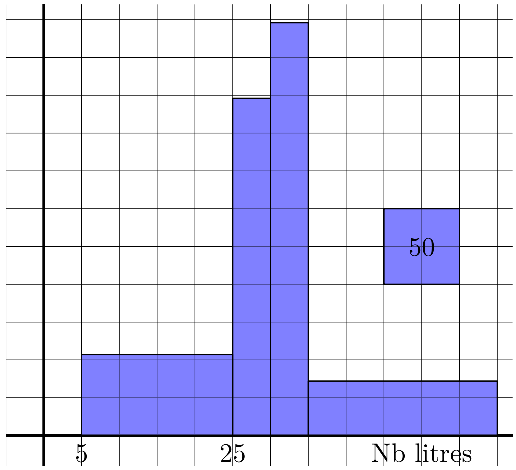
2.1 Graphiques et diagrammes

Exercice 1.
L'histogramme ci-contre indique la répartition des élèves d'un lycée suivant leur taille en cm.



1. Combien y a-t-il d'élèves dans ce lycée ?
2. Compléter un tableau d'effectif.
3. Indiquer dans quelle classe est la médiane.
4. Dans le tableau de la question 2, ajouter une ligne « hauteur » et une ligne « $\frac{\text{effectif}}{\text{amplitude}}$ ». Compléter ces deux lignes.
5. Que constate-t-on ?

Exercice 2.
L'histogramme ci-contre indique la répartition des demandes des clients (en litres) à une station service.



1. Compléter un tableau d'effectif.
2. En utilisant le centre de chaque classe, calculer une estimation du nombre moyen de litres servis.
3. Dans quelle classe se trouve la médiane de cette série ?

Exercice 3.
On donne la série statistique suivante constituée des montants dépensés par cinquante clients d'une petite épicerie :

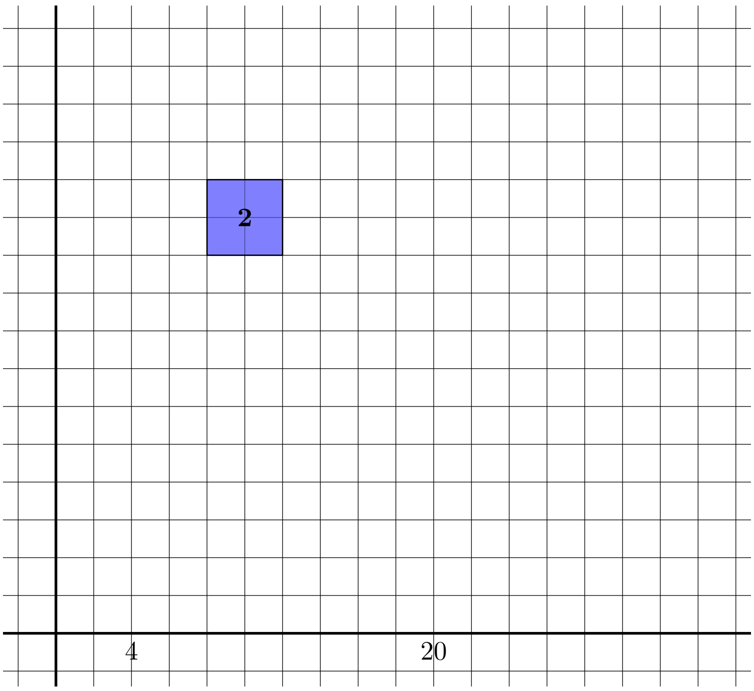
0,80	8,24	12,32	15,36	17,74	19,20	20,24	21,84	24,64	27,28
1,60	9,20	13,96	15,92	18,24	19,68	20,56	22,48	25,05	28,40
3,04	9,60	13,68	16,48	18,48	19,92	20,80	23,04	25,44	29,84
4,80	11,20	14,40	16,80	18,64	20	21,12	23,68	25,76	30,40
8	11,68	14,96	17,20	18,88	20,08	21,60	23,92	26,4	31,36

1. Regrouper les données ci-dessous par classes dans le tableau dressé en fin d'exercice.
2. Compléter la ligne des amplitudes de classes.
3. On rappelle que dans un histogramme, la largeur l de chaque rectangle est proportionnelle à l'amplitude a de la classe. De plus l'aire A de chaque rectangle est proportionnelle à l'effectif E de la classe. Pour chaque classe, on appelle densité le quotient de l'effectif par l'amplitude. Montrer que la hauteur h du rectangle est proportionnelle à la densité de la classe.
4. Pour construire l'histogramme de cette série, on choisit comme unité d'aire 1 cm^2 pour un effectif de 2 et en abscisse, on prend 1 cm pour 4 €.

a. Compléter la ligne « largeur des rectangles » dans le tableau ci-après.
b. Quelle sera l'aire du premier rectangle ? En déduire sa hauteur.
c. En utilisant la proportionnalité entre la densité et la hauteur, compléter le reste de la ligne « hauteur » du tableau.

5. Construire l'histogramme dans le repère fourni ci-après.

	[0 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 18[	[18 ; 20[	[20 ; 22[	[22 ; 24[	[24 ; 28[	[28 ; 32[
effectifs									
amplitudes									
largeur (cm)									
densités									
hauteurs (cm)									



2.2 Calculs divers

Exercice 4.
Voici un tableau donnant la couleur des bonbons d'un paquet :

Couleurs	jaune	vert	rouge	orange
Effectifs	15	20		10
Fréquences	0,2			

1. Montrer que le nombre total de bonbons dans le paquet est 75.
2. Quel est le nombre de bonbons de couleur rouge ?
3. Compléter le tableau en calculant les fréquences manquantes.

Exercice 5.
Les tableaux suivants récapitulent les moyennes trimestrielles obtenues par trois classes de 30 élèves :
Classe 1 :

Notes	2,5	4,5	5	6	6,5	7,5	8,5	9	10	10,5	12	12,5	13	13,5	14	15,5
Effectifs	1	2	2	2	4	2	1	1	1	2	1	5	2	1	1	2

Classe 2 :

Notes	2	2,5	3	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8	8,5	10,5	11,5	12,5	13	14,5	15,5
Effectifs	1	2	1	3	1	1	5	1	1	2	2	2	2	2	2	2

Classe 3 :

Notes	1,5	2,5	3	3,5	4,5	5,5	6	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	12	12,5	13	14,5
Effectifs	1	2	1	4	1	1	1	3	1	2	2	1	1	4	1	4

1. Pour chacune des trois classes :
   a. Déterminer la médiane, le premier et le troisième quartiles.
   b. Calculer l'étendue E_i, la moyenne $\overline{x_i}$ et l'écart interquartile.
   c. Calculer le pourcentage d'élèves dont la note est comprise dans l'intervalle interquartile.
2. On décide de rééquilibrer les moyennes de la façon suivante :
   – on multiplie toutes les notes de la deuxième classe par 1,12 ;
   – on ajoute 1,2 à toutes les notes de la troisième classe.
   Pour chacune de ces deux classes, calculer :
   a. la nouvelle moyenne et déterminer la nouvelle médiane ;
   b. le pourcentage d'élèves dont la note est comprise dans l'intervalle interquartile.

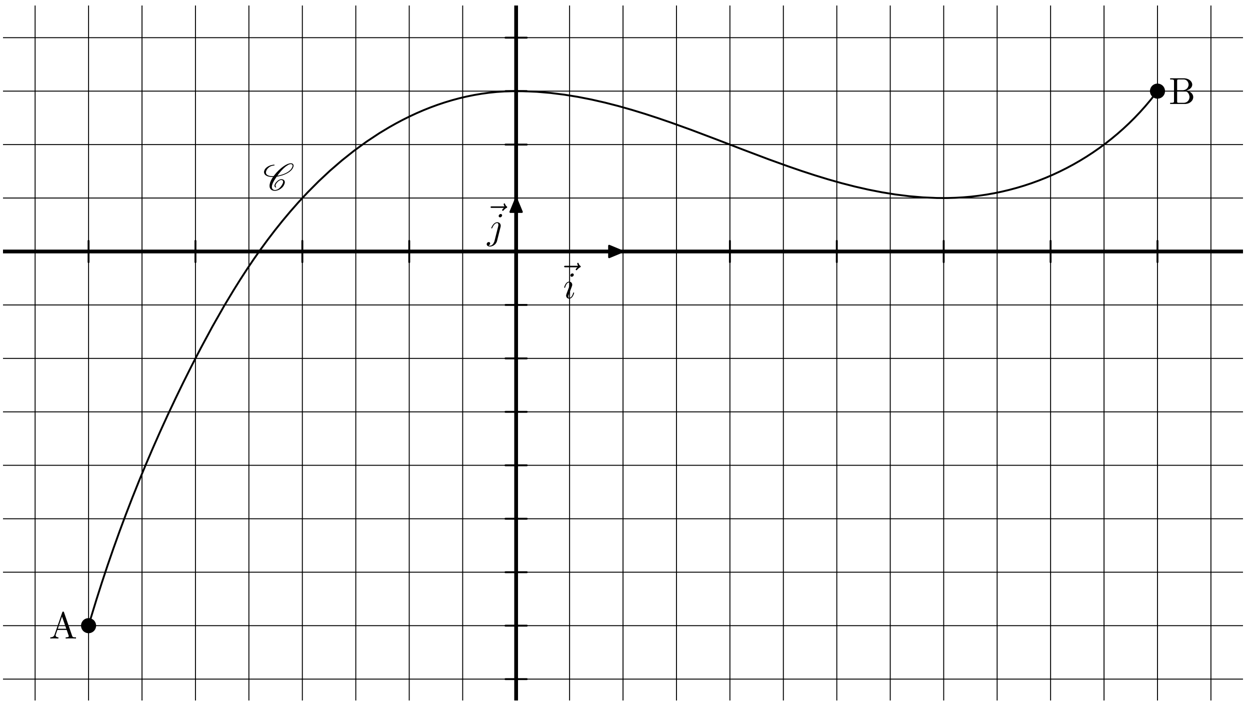
Chapitre 9

Fonctions usuelles

Dans ce chapitre, nous allons découvrir deux nouvelles fonctions : la fonction carré et la fonction inverse. Nous verrons ensuite comment les utiliser pour étudier d'autres fonctions définies à partir de celles-ci. Mais avant de débuter, et pour se rafraîchir la mémoire sur les fonctions, un peu de lectures graphiques...

1 Rappels sur les lectures graphiques

Exercice 1.
Voici la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$:



1. Quel est l'ensemble de définition I de f ?
2. Déterminer graphiquement les images des nombres -4, 0, 2 et 6.
3. Déterminer graphiquement les valeurs exactes (ou approchées s'il y a lieu) du (ou des) antécédent(s) de -2 et de 1.
4. Donner les valeurs de $f(-3)$, $f(-2)$ et $f(4)$.

5. Résoudre (en donnant des valeurs approchées des solutions s'il y a lieu) sur I les équations $f(x) = -2$, $f(x) = 3$ et $f(x) = 4$.
6. Déterminer une valeur approchée du nombre α, unique solution de l'équation $f(x) = 0$.
7. Dresser le tableau de signes de la fonction f.
8. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
9. Quel est le maximum de de la fonction f sur I ? En quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?
10. Quel est le minimum de la fonction f sur I ? Et sur $[0\,;\,6]$?
11. Tracer le segment de droite joignant les points A et B. Ce segment est la représentation graphique d'une fonction g sur I.
    a. Quel est le type de la fonction g ?
    b. Quelle est la forme de l'expression algébrique de $g(x)$?
    c. Déterminer (graphiquement ou par le calcul) l'expression de $g(x)$.
12. Résoudre graphiquement les équations $g(x) = 0$ puis $g(x) = f(x)$.

2 Activités

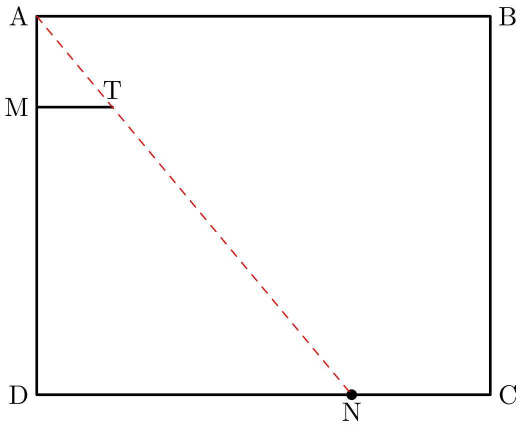
2.1 La fonction carré

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Dans ce repère on considère le point $A(0; -1)$ et pour tout réel x le point $M(x; 0)$. La perpendiculaire à (AM) passant par M coupe l'axe des ordonnées en un point B.
Le but de cette activité est d'étudier l'ordonnée de B en fonction de l'abscisse de A.

1. Que peut-on dire de B si $x = 0$?
2. La perpendiculaire à (AM) passant par M coupe-t-elle toujours l'axe des ordonnées ? Justifier.
3. Dans cette question, on considère le cas où $x \neq 0$.
    a. Montrer que $\widehat{OBM} = \widehat{OMA}$.
    b. En exprimant la tangente de cette mesure d'angle dans deux triangles rectangles, montrer que $OM^2 = OB \times OA$.
    c. En déduire que $OB = x^2$.
4. Soit f la fonction qui à l'abscisse de M associe l'ordonnée de B ; on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
    a. Donner l'expression algébrique de $f(x)$.
    b. Que peut-on dire du signe de $f(x)$?
    c. Pour une valeur de x fixée, expliquer comment construire géométriquement le point P de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x.
5. Avec GeoGebra :
    a. Placer le point A par ses coordonnées puis un point M sur l'axe des abscisses.
    b. Construire la perpendiculaire à (AM) passant par M et nommer B son intersection avec l'axe des ordonnées.
    c. Construire le point P à l'aide de l'explication donnée à la question 4c.
    d. Activer la trace de P et faire varier M sur l'axe des abscisses.
    e. Quelles semblent-être les variations de la fonction f sur $\mathbf{R}$?
    f. Discuter suivant les valeurs de a du nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$. On donnera l'interprétation graphique de ce résultat.

2.2 La fonction inverse

Sur la figure ci-contre on a représenté le jardin de M. X (le rectangle $ABCD$).
Le segment $[MT]$ représente un mur de longueur a (au travers duquel on ne peut rien voir) que M. X va construire perpendiculairement à $[AD]$.
M. X se pose la question suivante : « si je construis le mur à x mètres de A, à quelle distance d de D mon voisin doit-il se placer sur $[DC]$ pour me voir lorsque je suis en A ? »
On appelle N la position du voisin sur $[DC]$ à partir de laquelle il voit M. X en A.



On note x la distance AM, d la distance DN, a la longueur MT du mur, L la longueur AB du jardin, et r la largeur AD du jardin.

1. Calculer d avec $L = 10$, $a = 2$, $r = 6$ et $x = 3$.
2. Toujours avec $L = 10$, $a = 2$, $r = 6$, quelle doit être la position de M pour que le voisin ne puisse pas voir M. X même s'il se place au bout du jardin (c'est-à-dire en C) ?
3. Exprimer d en fonction de r, a et x.
4. On fixe désormais $r = 6$, $a = 2$ et $L = 10$. On note f la fonction qui à x (en m) associe la distance d (en m).
   a. Donner l'expression algébrique de $f(x)$.
   b. En tenant compte des contraintes mathématiques ainsi que celles du problème posé, quelles valeurs x peut-il prendre ? en déduire $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f.
   c. Résoudre $f(x) = 10$. Interpréter la solution dans le cadre du problème posé.
   d. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x en m	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
$f(x)$ en m								

   e. Représenter graphiquement l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.
   f. Quelles semblent être les variations de f sur $\mathscr{D}_f$?

3 Fonctions usuelles

3.1 Fonction carré

Exercice 2.

1. Rappeler les variations de la fonction carré sur $\mathbf{R}_-$ puis sur $\mathbf{R}_+$. Quel est le minimum de la fonction carré sur $\mathbf{R}$?
2. En déduire un encadrement de x^2 dans chacun des cas suivants (sans calculatrice !) :

(a) $1{,}2 < x < 2{,}5$
(b) $5 \leq x < 11$
(c) $-3{,}5 \leq x \leq -2{,}4$
(d) $-7 < x \leq -4$
(e) $-3 < x < 5$
(f) $x \leq 5$

Exercice 3.
Ranger par ordre croissant les carrés des nombres suivants *toujours sans calculatrice* :

$$0{,}25; \quad \frac{1}{3}; \quad 0{,}1; \quad \pi; \quad \frac{22}{7}; \quad \frac{1}{2}; \quad 3$$

Exercice 4.
Soit x et y deux réels tels que $x < y$. Dans chacun des cas suivants, ordonner x^2 et y^2 lorsque c'est possible et donner un contre-exemple sinon :

(a) x et y sont tous les deux négatifs ;

(b) x et y sont tous les deux positifs ;

(c) x est négatif et y est positif ;

(d) $x \in [-5; -3]$ et $y \in [1; 2]$.

3.2 Fonction inverse

Exercice 5.

1. Rappeler les variations de la fonction inverse sur $\mathbf{R}_-^*$ puis sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. En déduire, *sans calculatrice* un encadrement de $\frac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants (lorsque c'est possible) :

(a) $4 < x < 5$

(b) $5 \leq x < 10$

(c) $-2{,}5 \leq x \leq -1$

(d) $-7 < x \leq -4$

(e) $-3 \leq x < 5$

(f) $x \leq 5$

Exercice 6.
Ranger par ordre croissant les inverses des nombres suivants *sans calculatrice* :

$$0{,}25; \quad \frac{1}{3}; \quad 0{,}1; \quad \pi; \quad \frac{22}{7}; \quad \frac{1}{2}; \quad 3$$

Exercice 7.
Soit x et y deux réels non nuls tels que $x < y$. Dans chacun des cas suivants, ordonner $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ lorsque c'est possible et donner un contre-exemple sinon :

(a) x et y sont tous les deux négatifs ;

(b) x et y sont tous les deux positifs ;

(c) x est négatif et y est positif ;

(d) $x \in [-5; 3]$ et $y \in [5; 6]$.

4 Avec les fonctions carré et inverse

On rappelle que la fonction carré ($x \mapsto x^2$) est decroissante sur $\mathbf{R}_-$, puis croissante sur $\mathbf{R}_+$ et que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbf{R}_-^*$ et aussi sur $\mathbf{R}_+$.

Exercice 8.
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$.

1. Montrer que $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 3$.

2. Étudier les variations de f sur $]-\infty\,;\,2]$ puis sur $[2\,;\,+\infty[$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[-3\,;\,6]$.
4. Quel est le minimum de f sur $[-2\,;\,6]$?
5. Tracer la courbe représentative de f sur $[-2\,;\,6]$ dans un repère orthogonal.

Exercice 9.
Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = -2x^2 - 4x + 3$.

1. Montrer que $g(x) = -2(x+1)^2 + 5$.
2. Étudier les variations de g sur $]-\infty\,;\,-1]$ puis sur $[-1\,;\,+\infty[$.
3. Dresser le tableau de variations de g sur $[-3\,;\,6]$.
4. Quel est le maximum de g sur $[-3\,;\,6]$?
5. Tracer la courbe représentative de g sur $[-3\,;\,6]$ dans le même repère que celui de l'exercice 8.
6. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ (où f est la fonction de l'exercice 8).

Exercice 10.
La fonction q est un polynôme de degré 2. Son minimum est -3 atteint pour $x = 2$. La courbe représentative de q passe par le point $A(0; 5)$.
Déterminer q.

Exercice 11.
Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de h.
2. Montrer que pour $x \in \mathscr{D}_h$, on a $h(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$.
3. Étudier les variations de h sur $]-\infty\,;\,1[$ puis sur $]1\,;\,+\infty[$.
4. Dresser le tableau de variations de h sur $[\frac{5}{4}\,;\,5]$.
5. Tracer la courbe représentative de h sur cet intervalle.

Exercice 12.
Soit p la fonction définie par $p(x) = \frac{x+1}{x+3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de p.
2. Montrer que pour $x \in \mathscr{D}_p$, on a $p(x) = 1 - \frac{2}{x+3}$.
3. Étudier les variations de p sur $]-\infty\,;\,-3[$ puis sur $]-3\,;\,+\infty[$.
4. Dresser le tableau de variations de p sur $[-7\,;\,-\frac{16}{5}]$.
5. Tracer la courbe représentative de p sur cet intervalle.

Exercice 13.
Soit f et g les fonctions définies sur $[-3\,;\,7]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + (x-2)^2} \text{ et } g(x) = 1 + (x-2)^2$$

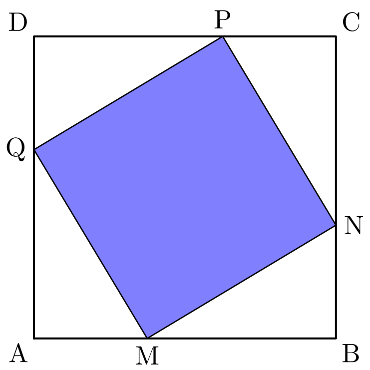
1. Étudier les variations de la fonction g sur $[-3\,;\,2]$ puis sur $[2\,;\,7]$.
2. Dresser le tableau des variations de g sur $[-3\,;\,7]$.

3. Étudier le signe de g sur $[-3\,;\,7]$.
4. Soit a et b deux réels de $[-3\,;\,2]$ tels que $a < b$.
   a. Justifier que $1 + (a-2)^2 > 1 + (b-2)^2 > 0$.
   b. En déduire que $f(a) < f(b)$.
   c. En déduire les variations de f sur $[-3\,;\,2]$.
5. Étudier de la même manière les variations de f sur $[2\,;\,7]$.
6. Dresser le tableau des variations de f sur $[-3\,;\,7]$.
7. Dresser un tableau de valeurs de f pour x entier entre -3 et 7 puis tracer le courbe représentative de f dans un repère orthogonal (unités 1cm en abscisses et 5cm en ordonnées).

5 Un problème d'aire minimale

Le but de cette activité est d'étudier la surface d'un polygone inscrit dans un carré.

On considère la figure ci-contre où $ABCD$ est un carré avec $AB = 4$.
M est un point du segment $[AB]$.
N, P et Q sont les points des segments $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ tels que $AM = BN = CP = DQ$.
Le but du problème est de trouver la position de M sur $[AB]$ pour que l'aire du quadrilatère $MNPQ$ soit minimale.
Dans la suite, on notera t la distance AM.



5.1 Préliminaires

1. Démontrer que les triangles AMQ et BMN ont les mêmes dimensions. En déduire qu'ils ont aussi des angles deux à deux égaux.
2. Démontrer que les angles $\widehat{AMQ}$ et $\widehat{BMN}$ sont complémentaires.
3. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{NMQ}$.
4. En admettant que par un raisonnement analogue on obtient la même mesure pour les trois autres angles du quadrilatère $MNPQ$, déterminer la nature de ce quadrilatère.

5.2 Avec GeoGebra

1. Lancer le logiciel GeoGebra.
2. Placer un point A libre dans le plan. Construire alors le carré $ABCD$ en respectant les dimensions ; contrainte : en déplaçant le point A, le quadrilatère $ABCD$ doit rester un carré.
3. Placer un point M, libre sur le segment $[AB]$.
4. Terminer la construction des points N, P et Q et du polygone $MNPQ$; il faut bien entendu qu'en déplaçant M sur $[AB]$, les points M, N et P se déplacent aussi. Pour cela, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la partie 5.1
5. Par la commande `t=distance(A,M)`, afficher dans la fenêtre « algèbre » la distance AM.

Une fois la construction terminée, modifier la position du point M et observer dans la fenêtre de gauche la valeur de l'aire du polygone $MNPQ$.
Pour quelle valeur de t cette aire semble-t-elle minimale ? Quelle est alors cette aire minimale ? (On la note $\mathscr{A}_{\text{min}}$)
Enregistrer la figure sous le nom `carre` et l'envoyer par Harp dans l'espace de votre prof de maths préféré….

5.3 Démonstration

1. Exprimer en fonction de t l'aire du triangle AMQ.
2. Montrer que l'aire $\mathscr{A}(t)$ de $MNPQ$ s'exprime en fonction de t par $\mathscr{A}(t) = 2t^2 - 8t + 16$.
3. Montrer que $\mathscr{A}(t) - \mathscr{A}_{min} = 2(t-2)^2$.
4. Conclure.

5.4 Prolongement

Effectuer le même travail dans le cas où $ABCD$ est un rectangle.

Chapitre 10

Probabilités

Exercice 1.
Dans une urne, on place 8 boules rouges, 5 boules blanches et 7 boules vertes. On tire *au hasard* une boule de l'urne. Quelle est la probabilité que (on donnera les réponses sous la forme de fractions réduites) :
la boule soit blanche ? La boule ne soit pas rouge ? La boule soit rouge ou blanche ?

Exercice 2.
On lance un dé régulier à six faces. Quelle est la probabilité que le résultat soit :
impair ? Supérieur ou égal à 2 ? Pair et strictement supérieur à 4 ? Ni pair, ni inférieur à 4 ?

Exercice 3.
Dans un jeu de trente-deux cartes bien battu, on tire au hasard une carte. Quelle est la probabilité d'obtenir :
la dame de pique ? Un trèfle ? Une figure (roi, dame ou valet) ? Une figure rouge ?

Exercice 4.
Dans une classe de 32 élèves, on dénombre 20 filles, 15 anglais LV1 dont 5 filles, 18 espagnols LV2. On choisit au hasard un élève dans la classe.

1. Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit :
   un garçon ? Un élève qui étudie l'espagnol en LV2 ? Un garçon qui étudie l'anglais en LV1 ?
2. On choisit maintenant au hasard un élève parmi ceux qui étudient l'anglais LV1. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?

Exercice 5.
On possède un dé truqué à six faces. On note p la loi de probabilité associée à l'expérience « on lance le dé une fois ». On donne :

$$p(1) = p(2) = \frac{1}{8}; \quad p(3) = p(4) = \frac{1}{5}; \quad p(5) = 0{,}25$$

1. Calculer la probabilité d'obtenir un 6.
2. Calculer la probabilité d'obtenir un chiffre pair.
3. Calculer la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égal à 4.

Exercice 6.
On a relevé les performances d'un lanceur de fléchettes lors de lancers sur une cible comportant cinq zones. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

Zone et points marqués	20	19	18	17	16	0	Total
Nombre de lancers	344	288	452	460	650	306	
Fréquence							
Points obtenus							

1. a. Compléter le tableau.
   b. Calculer le nombre moyen de points obtenus au cours de ces lancers.
2. Cette étude est significative des performances de ce lanceur de fléchettes. C'est à dire que la probabilité d'obtenir une zone est assimilable à la fréquence calculée à la question 1a.
   a. Calculer la probabilité de l'événement « atteindre la cible », puis de l'événement « marquer strictement plus de 18 points ».
   b. On sait que la fléchette atteint la cible. Quelle est la probabilité qu'elle atteigne la zone 20.

Exercice 7.
On lance un dé cubique parfait puis une pièce de 1€ bien équilibrée. À PILE on associe le nombre 1 et à FACE on associe le nombre 2. Un résultat de l'expérience est la somme du numéro obtenu sur le dé et du nombre obtenu par la pièce.

1. Modéliser cette expérience aléatoire par une méthode de votre choix (arbre, tableau, ...)
2. En déduire la probabilité d'obtenir une somme :
   impaire ; multiple de 3 ; égale à 6 ; ni 6, ni 5 ; au moins 4 ; au plus 3.

Exercice 8.
On considère deux dés fantaisistes dont les faces sont marquées de la façon suivante :
– le premier dé : 1, 2, 2, 3, 4, 4 ;
– le deuxième dé : 1, 3, 4, 5, 6, 8.
On lance les deux dés et on appelle S la somme des points obtenus. On suppose que chaque face a la même probabilité d'apparaître.

1. À l'aide d'un tableau à deux entrées, donner la somme obtenue pour chacun des couples $(i; j)$, où i est le résultat du premier dé et j le résultat du second dé.
2. Dresser la loi de probabilité de la somme S.
3. Calculer la probabilité que S soit impaire.

Exercice 9.
Quatre élèves de première, Anne, Ben, Céline et Didier, sont convoqués pour passer les oraux de français. L'ordre de passage est aléatoire.

1. Déterminer toutes les façons possibles de faire passer ces quatre élèves.
2. Ben ne désire pas passer dans les deux premiers. Quelle est la probabilité que le vœu de Ben soit réalisé ?
3. Didier souhaite passer l'oral juste après Anne. Quelle est la probabilité que cet événement se réalise ?

Exercice 10.
Une urne contient cinq boules numérotées « 1 », sept boules numérotées « 2 », trois boules « 3 », quatre boules « 4 », et six boules « 5 ».
On note p la loi de probabilité associée à l'expérience « on tire une boule dans l'urne ». On note A l'événement « obtenir un chiffre pair » et B l'événement « obtenir un chiffre supérieur strictement à 3 ».

1. Calculer $p(A)$ et $p(B)$.
2. Expliciter les événements suivants :
$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad \overline{A}, \quad \overline{B}, \quad \overline{A \cup B}, \quad \overline{A \cap B}$$
3. Calculer les probabilités des événements de la question précédente.

Exercice 11.
On dispose dans une boîte sept papiers sur lesquels on inscrit les sept couleurs de l'arc-en-ciel. On tire au hasard un papier, on note sa couleur et on le remet dans la boîte. À l'issue de ce tirage, on recommence deux fois l'opération.

1. Quelles sont les sept couleurs de l'arc-en-ciel ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir trois couleurs différentes ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir (au moins) deux fois la même couleur ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir deux couleurs différentes ?

Exercice 12.
On dispose de cinq cartes portant chacune une des lettres du mot MAIRE. On effectue trois tirages successifs sans remise de l'une de ces cartes pour former un mot de trois lettres.

1. Combien de mots peut-on former en tout (les mots ayant un sens ou non) ?
2. Quelle est la probabilité de former le mot MER ? Le mot MAI ?
3. On note V et C les événements « le mot commence par une voyelle » et « la lettre du milieu est une consonne ».
   a. Quelle est la probabilité de l'événement V ? De l'événement C ?
   b. Quelle est la probabilité de l'événement $V \cap C$? De l'événement $V \cup C$?

Exercice 13.
Un jardinier dispose d'un sac rempli de 1 000 bulbes de tulipes. Parmi ceux-ci, 60% seront susceptibles de donner des tulipes jaunes, 25% des tulipes rouges, le reste des tulipes noires. Par ailleurs, 28% de la totalité des bulbes ne fleuriront pas ; 80% des bulbes de tulipes jaunes fleuriront, 60 bulbes de tulipe noire ne fleuriront pas.

1. Compléter le tableau suivant :

	Nombre de bulbes de tulipes jaunes	Nombre de bulbes de tulipes rouges	Nombre de bulbes de tulipes noires	Total
Nombre de bulbes qui fleuriront				
Nombre de bulbes qui ne fleuriront pas				
Total				

2. Le jardinier tire au hasard un bulbe de son sac. On note F l'événement « le bulbe fleurira », J « le bulbe est celui d'une tulipe jaune », R « le bulbe est celui d'une tulipe rouge » et N « le bulbe est celui d'une tulipe noire ». Déterminer les probabilités des événements J, F, $J \cap F$ et $J \cup F$.
3. Le jardinier choisit maintenant un bulbe et constate qu'il est celui d'une tulipe jaune. Calculer la probabilité qu'il fleurira.

Exercice 14.
Une fourmi se déplace le long des arêtes d'une pyramide $ABCDS$. À partir d'un sommet quelconque, elle se dirige au hasard, avec équiprobabilité, vers un sommet voisin. On dit qu'elle fait un pas. Elle se trouve en A au départ.

1. Après avoir fait deux pas, quelle est alors la probabilité :
   – qu'elle se retrouve à nouveau en A (événement A) ?
   – qu'elle soit en B (événement B) ? Qu'elle soit en C ? Qu'elle soit en D ?
2. Pour tout entier n, on appelle p_n la probabilité que la fourmi soit en S après n pas. En construisant un arbre, pour représenter cette situation, montrer que pour tout n, on a :
$$p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$$
3. Écrire un algorithme permettant de calculer et d'écrire toutes les valeurs de p_n pour n entier compris entre 1 et 10.
4. Calculer p_n pour n entier compris entre 1 et 10 en faisant « tourner » cet algorithme à la main ou en le programmant.

Exercice 15 (problème du Duc de Toscane)**.**
On lance trois dés équilibrés à six faces. On note la somme des chiffres obtenus sur les trois dés. La probabilité d'obtenir un 10 est-elle plus importante que celle d'obtenir un 9 ? Justifier. On pourra commencer par tester les résultats obtenus sur un grand nombre d'expériences avec des dés, un tableur, un logiciel de programmation, une calculatrice, ...

Exercice 16.
On place dans une urne x boules dont cinq rouges et les autres sont blanches. Une expérience aléatoire consiste à tirer une boule, noter sa couleur, la remettre dans l'urne et recommencer une fois.
On note A l'événement obtenir deux boules blanches.

1. Montrer que $p(A) = \frac{(x-5)^2}{x^2}$.
2. Àl'aide de la calculatrice graphique, tracer la représentation graphique de la fonction f définie sur $]5 ; +\infty$ par $f(x) = \frac{(x-5)^2}{x^2}$.
3. Toujours à la calculatrice, résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 0{,}5$. Interpréter le résultat dans le cadre de ce problème.

Chapitre 11

Inéquations

1 Tests...

Exercice 1.
Dans chaque cas, déterminer si les nombres proposés sont solution de l'inéquation :

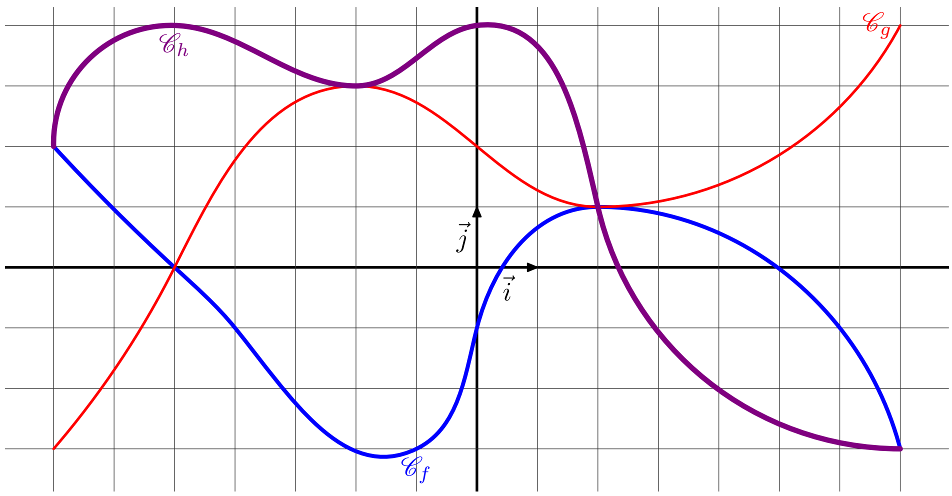
(a) $2x + 3 \leq 5x - 12$ pour $a = 5$, $b = \sqrt{3}$, $c = -2$, $d = 10$.

(b) $5x^2 - 3x - 2 > 0$ pour $a = \sqrt{3}$, $b = -2$, $c = \frac{1}{3}$, $d = 0$.

(c) $\frac{2x+3}{x+1} \geq 4x + 3$ pour $a = \frac{3}{4}$, $b = -1$, $c = 3$, $d = \frac{1}{3}$.

2 Graphiquement...

Exercice 2.
On donne ci-dessous les représentations graphiques de trois fonctions f, g et h :



1. Résoudre graphiquement les équations $f(x) = g(x)$, $f(x) = h(x)$ et $g(x) = h(x)$. Dans chaque cas, on donnera une phrase expliquant la réponse.
2. Résoudre graphiquement les inéquations $f(x) < g(x)$ et $f(x) \leq g(x)$.
3. Soit $A(2; 1)$ et $B(7; -3)$.
   a. Placer sur le graphique ci-dessus les points A et B.
   b. Tracer le droite (AB) et déterminer son équation réduite.

c. En déduire l'expression de $m(x)$ où m est la fonction affine représentée par la droite (AB).

d. Résoudre l'équation $h(x) = m(x)$ (on donnera si besoin une valeur approchée des solutions).

e. Résoudre l'inéquation $h(x) \geq m(x)$.

3 Algébriquement...

Exercice 3.
Résoudre les inéquations suivantes et donner la réponse sous forme d'un intervalle :

$$2x + 5 \leq 6; \qquad 3x + 4 > 7x - 7; \qquad 4(x - 5) \geq -2x + 8; \qquad 5x + 3 < 2x - 5$$

Exercice 4.
On considère la fonction f définie par $f(x) = (x + 5)(2x - 4)$.

1. La fonction f est-elle affine ? Calculer $f(-6)$, $f(-2)$, $f(5)$. Le tableau de signes de f sera-t-il du même type que celui d'une fonction affine ?
2. Étudier le signe de $x + 5$ suivant les valeurs de x. Même question pour $2x - 4$. Regrouper les résultats dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$x + 5$	
$2x - 4$	
$(x + 5)(2x - 4)$	

3. Pour x inférieur à -5, quel est le signe de $x + 5$? Quel est le signe de $2x - 4$? Que peut-on en déduire pour le signe du produit $(x + 5)(2x - 4)$? Compléter alors la case correspondante de la dernière ligne du tableau par un $+$ ou un $-$.
4. Compléter la dernière ligne du tableau par un raisonnement analogue.
5. Résoudre $(x + 5)(2x - 4) \geq 0$.

Exercice 5.
Dresser le tableau de signes des fonctions f et g définies par :
$f(x) = (3 - x)(2x - 5)$ et $g(x) = (4x - 3)(5x - 4)(3x - 2)$.
Puis résoudre $f(x) > 0$ et $g(x) \leq 0$.

Exercice 6.
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x+4}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier le signe de $2x + 1$ suivant les valeurs de x. Même question pour $x + 4$ et regrouper les résultats dans un seul tableau.
3. Ajouter une ligne « $f(x)$ » au tableau précédent et compléter le signe. On indiquera la ou les éventuelle(s) valeur(s) interdite(s) de f par une double barre verticale.
4. Résoudre $f(x) \geq 0$.

Exercice 7.
Résoudre l'inéquation $\frac{3}{2x-3} \leq \frac{-1}{2-x}$.

4 Problèmes

Exercice 8.
Un particulier doit faire transporter des marchandises. Une première entreprise lui propose un forfait de 460 € puis 3,50 € par kilomètre. La seconde entreprise lui propose une prise en charge de 1 000 € puis 2 € par kilomètre.
Déterminer l'entreprise à choisir en fonction du nombre de kilomètres à parcourir.

Exercice 9.
Un particulier loue un véhicule 750 € pour un mois. Il paye en plus 0,75 € par kilomètre. Déterminer le nombre de kilomètres à parcourir pour que le prix de revient par kilomètre soit inférieur ou égal à 1 €.

Exercice 10.
On considère un triangle ABC rectangle isocèle en A et vérifiant $AB = 4$ cm.
M est un point variable du segment $[AB]$. N et P sont les points de $[AC]$ et $[BC]$ respectivements tels que AMN soit isocèle en A et BMP rectangle en M.

1. Faire une figure (si possible avec GeoGebra) et construire les triangles AMN, BMP et CNP.
2. On pose $t = AM$. Le but de l'exercice est de ranger par ordre croissant les aires des trois triangles AMN, BMP et CNP.
   a. Exprimer en fonction de t les aires de ces triangles qu'on notera respectivement $f(t)$, $g(t)$ et $h(t)$.
   b. À l'aide de la calculatrice (ou avec GeoGebra), tracer les représentations graphiques de ces trois fonctions. En déduire le rangement par ordre croissant de ces aires suivant les valeurs de t.

Exercice 11.
Pierre et Jacques ont un sac de 50 billes. Ils se les partagent de sorte que l'écart entre leurs nombres de billes respectifs est au plus de 15 billes (le partage 10-40 n'est donc pas valable).
On pose x le nombre de billes de Pierre suite au partage. Donner un encadrement de x.

Exercice 12.

Exercice 13.
Déterminer les réels dont le triple est strictement supérieur au carré.

Exercice 14.
Les longueurs des côtés d'un triangle ABC vérifient les inégalités suivantes :

$$2{,}1 < AB < 2{,}2; \qquad 4{,}3 < BC < 4{,}4; \qquad 3{,}5 < AC < 3{,}6$$

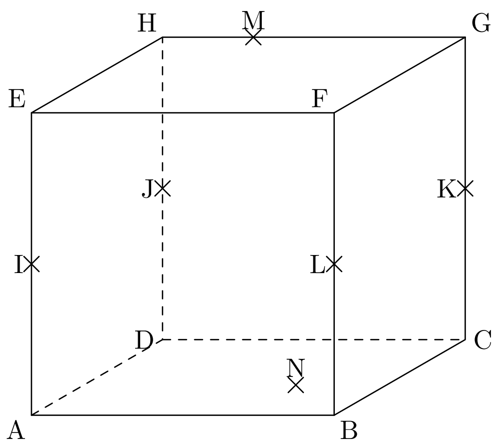
Ce triangle peut-il être rectangle ?

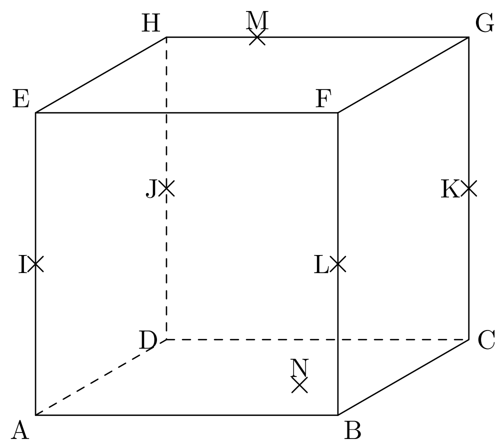
Chapitre 12

Géométrie spatiale

1 Positions relatives

Sur la figure[1] ci-dessous, $ABCDEFGH$ est un cube. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes $[AE]$, $[DH]$, $[CG]$ et $[BF]$. Le point M est sur l'arête $[HG]$ et le point N est sur la face $ABCD$.





1. Donner la position relative la plus complète possible des couples d'objets proposés (on écrira une phrase utilisant les mots de vocabulaire *coplanaires*, *parallèles*, *sécants*, *confondus*, *inclus dans*, *orthogonales(aux)* et *perpendiculaires*) :

   (a) (HJ) et (LB) : ....

   (b) (HJ) et (FG) : ....

   (c) (GL) et (BC) : ....

   (d) (EI) et (JB) : ....

   (e) (FL) et (AB) : ....

   (f) (EC) et (GA) : ....

   (g) (HIL) et (FG) : ....

1. Les deux figures sont identiques mais elles vous permettront de dessiner sur l'une tout en gardant un oeil sur la figure initiale.

(h) (IFG) et (KD) : ....

(i) (DN) et (EFM) : ....

(j) (HJ) et (IDA) : ....

(k) (ADN) et (GK) : ....

(l) (FIJ) et (ADE) : ....

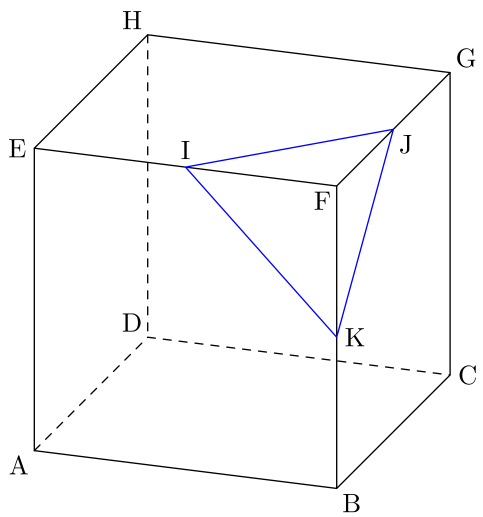
(m) (GIL) et (ABK) : ....

2. Construire le point d'intersection de (MJ) et (ABC).
3. Tracer la droite d'intersection des plans (AMF) et (EMG).
4. Construire la droite d'intersection des plans (BNF) et (EFG).
5. Même question pour (IJM) et (LKM).

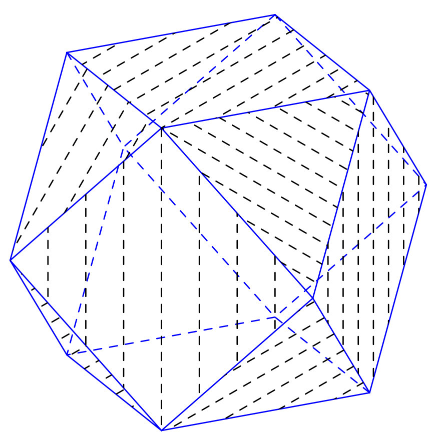
2 Cuboctaèdre

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté 4 cm (figure ci-après). On place les points I, J et K milieux respectifs des côtés $[FE]$, $[FG]$ et $[FB]$.

1. Dans le cube, quel est le nombre de sommets (que l'on notera s) ? Le nombre d'arêtes (que l'on notera a) ? Le nombre de faces (que l'on notera f) ? Calculer $s - a + f$.
2. De quelle nature est le triangle IJK ? Le construire en vraie grandeur. Calculer son aire.
3. Comment s'appelle le solide $FIJK$? En construire un patron. Dans ce cas également, calculez $s - a + f$.
4. Calculer le volume de $FIJK$. En déduire la hauteur du sommet F par rapport à la base IJK.
5. Déterminer le volume exact du solide obtenu en enlevant le solide $FIJK$ du cube. Dans ce cas encore, donner le nombre de faces, d'arêtes et de sommets, et calculer $s - a + f$.
6. On enlève ainsi les huit « coins » du cube $ABCDEFGH$, pour obtenir le solide ci-après.
   a. Calculer $s - a + f$ pour ce nouveau solide (appelé « cuboctaèdre », voir ci-dessous).
   b. Calculer le volume de ce solide. Calculer son aire latérale.
   c. Construire un patron de ce solide.



Le cube de départ



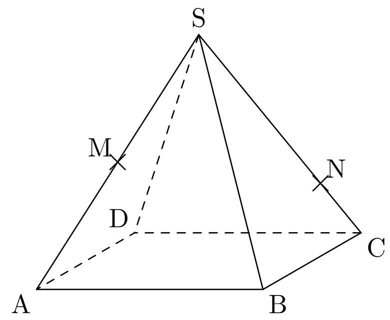
Le cuboctaèdre

3 Intersections. Sections

Exercice 1.

$SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée. M est le milieu de l'arête $[SA]$ et N est le point de l'arête $[SC]$ tel que $SN = \frac{3}{4}SC$.

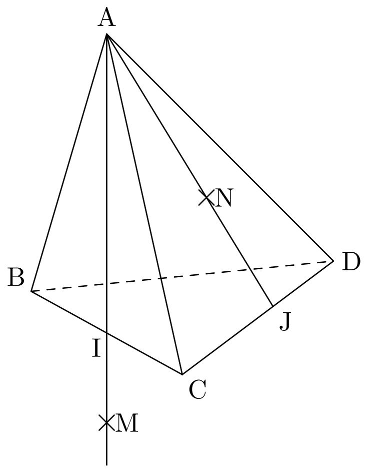
1. Démontrer que les droites (MN) et (AC) sont sécantes.
2. Construire leur point d'intersection.



Exercice 2.
Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un tétraèdre. I est un point de $[BC]$ et J un point de $[CD]$.
M est un point de $[AI)$ qui n'est pas sur $[AI]$ et N est un point de $[AJ]$.

1. Quelle est l'intersection des plans (BCD) et (AIJ) ? Justifier.
2. a. Montrer que les points M, N, I et J sont coplanaires.

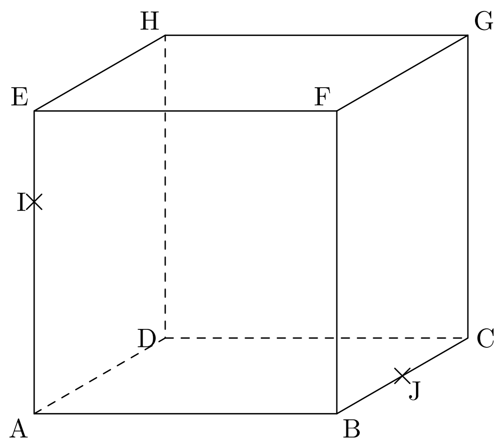
   b. On note P l'intersection de (MN) avec le plan (BCD). Montrer que $P \in (IJ)$. En déduire la construction de P.



Exercice 3.
Sur la figure ci-contre, $ABCDEFGH$ est un cube. I est un point de l'arête $[AE]$ et J un point de l'arête $[BC]$.

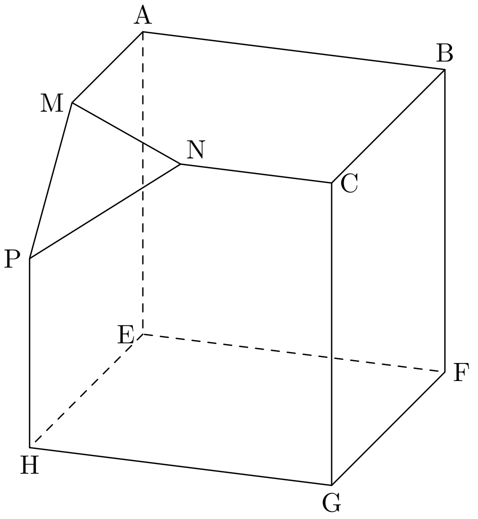
1. a. Montrer que I appartient au plan (AEJ).

   b. Montrer que J appartient au plan (BCI).
2. En déduire l'intersection de (AEJ) et (BCI).
3. Construire la section du cube par le plan (IJH).



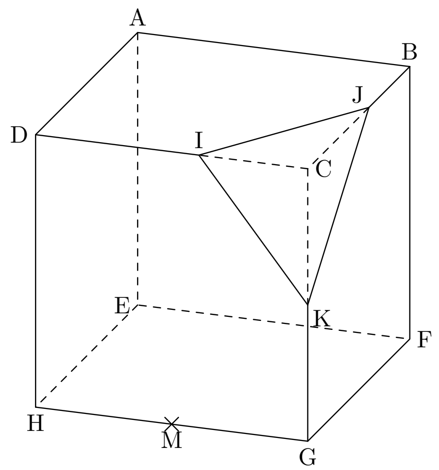
Exercice 4.
On a tracé ci-contre un cube dont on a coupé un coin.

1. Tracer la section de ce cube par le plan parallèle au plan MNP et passant par C.
2. On donne les longueurs suivantes :
   $AB = 8$ cm, $AM = 5$ cm, $CN = 4$ cm et $HP = 5$ cm. Construire le triangle MNP en vraie grandeur.
3. Quel est le volume du solide tracé ci-contre ?



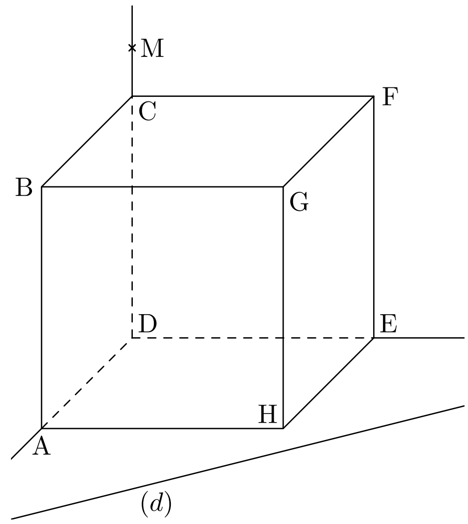
Exercice 5.
Sur la figure ci-contre on a tracé un cube tronqué. C est le sommet du coin coupé et M le milieu de $[HG]$.

1. Tracer la section du solide par le plan ACM.
2. Tracer la section de ce solide par le plan parallèle au plan ACM et passant par K.



Exercice 6.

$ABCDEFGH$ est un cube. La droite (d) fait partie du plan (ADE). M est un point de la droite (DC).
Construire la section du cube par le plan contenant la droite (d) et le point M.



Chapitre 13

Statistiques : épisode 2

Nous avons vu dans le chapitre 10 que la loi des grands nombres permetd'obtenir la probabilité approchée d'un événement élémentaire d'une expérience aléatoire en répétant un « grand » nombre de fois l'expérience. Nous allons appliquer ici ce principe en simulant des expériences aléatoires grâce à la calculatrice ou à l'ordinateur.

1 Avec des dés

1.1 Calculatrice et nombres aléatoires

N'ayant pas tous deux dés à six faces sur nous aujourd'hui, nous allons **simuler** cette expérience grâce à la calculatrice. En effet votre calculatrice a une fonction qui lui permet d'afficher un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 ; voici comment vous pouvez les faire afficher :

Sur Casio :
Dans le menu RUN, tapez OPTN, puis choisissez PROB (en utilisant la flèche si nécessaire), et enfin choisissez RAN#. Tapez sur EXE pour faire afficher ce nombre aléatoire. Un nouveau nombre s'affiche à chaque fois que vous appuyez sur EXE.

Sur TI :
Tapez MATH, puis choisissez PRB, et sélectionnez RAND. Tapez sur ENTER pour faire afficher ce nombre aléatoire. Un nouveau nombre s'affiche à chaque fois que vous appuyez sur ENTER.

Mais nous cherchons, pour simuler notre lancer de deux dés, à faire afficher par la calculatrice la somme de deux nombres **entiers** aléatoires compris entre 1 et 6. Pour obtenir un entier, nous allons utiliser la fonction INT de vos calculatrices, qui permet d'afficher la **partie entière** d'un nombre. Tapez la séquence suivante :

Sur Casio :
OPTN NUM INT (6 × OPTN PROB RAN# + 1) + OPTN NUM INT(6 × OPTN PROB RAN# + 1), ce qui doit afficher à l'écran INT(6×RAN#+1)+INT(6×RAN#+1). Si vous tapez sur EXE, un nombre entier compris entre 2 et 12 s'affiche. Pour recommencer, appuyer sur la flèche de gauche, puis frapper [1] la touche EXE.

Sur TI :
MATH NUM INT (6 × MATH PRB RAND + 1) + MATH NUM INT (6 × MATH PRB RAND + 1), ce qui doit afficher à l'écran INT(6×RAND+1)+INT(6×RAND+1). Si vous tapez sur ENTER, un nombre entier compris entre 2 et 12 s'affiche. Vous pouvez en afficher autant que vous voulez en frappant [2] la touche ENTER.

1. Doucement tout de même...
2. Doucement aussi ! Les TI ne sont pas plus solides...

1.2 Un exemple

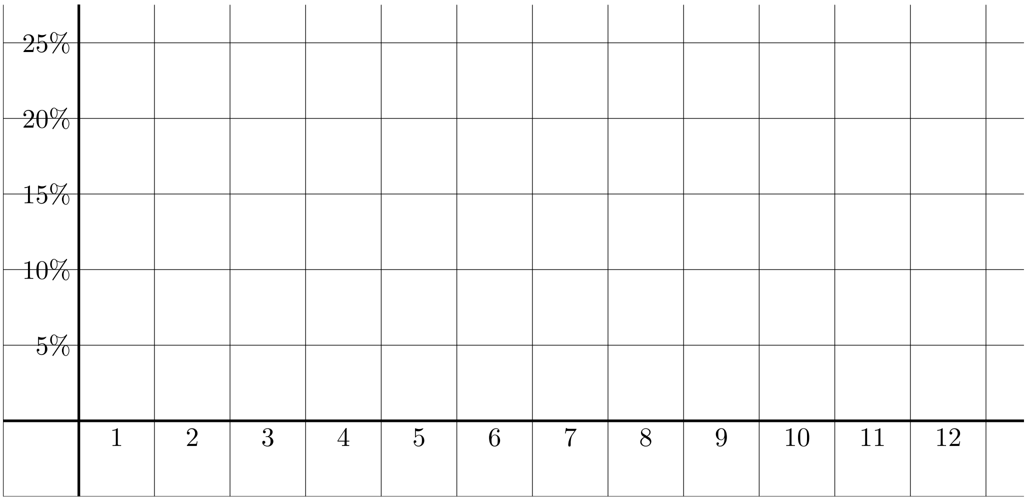
Une expérience aléatoire : on lance deux dés à six faces, et on note la somme des chiffres figurant sur la face supérieure de chacun d'eux.

1. Quels sont les résultats qu'il est possible d'obtenir ? (on appelle ces résultats les **issues** de l'expérience aléatoire).
2. a. À votre avis, chacune de ces issues a-t-elle les mêmes chances de se réaliser ?

   b. Si la réponse est non, indiquer quelle est, selon vous, l'issue la plus probable.
3. Effectuer une première série de 50 lancers, et noter les résultats obtenus dans le tableau ci-dessous ; on pourra par exemple faire un bâton dans la case correspondante à chaque apparition d'un numéro et regrouper les bâtons par cinq.

   Construire ensuite un diagramme en bâtons des fréquences relevées :

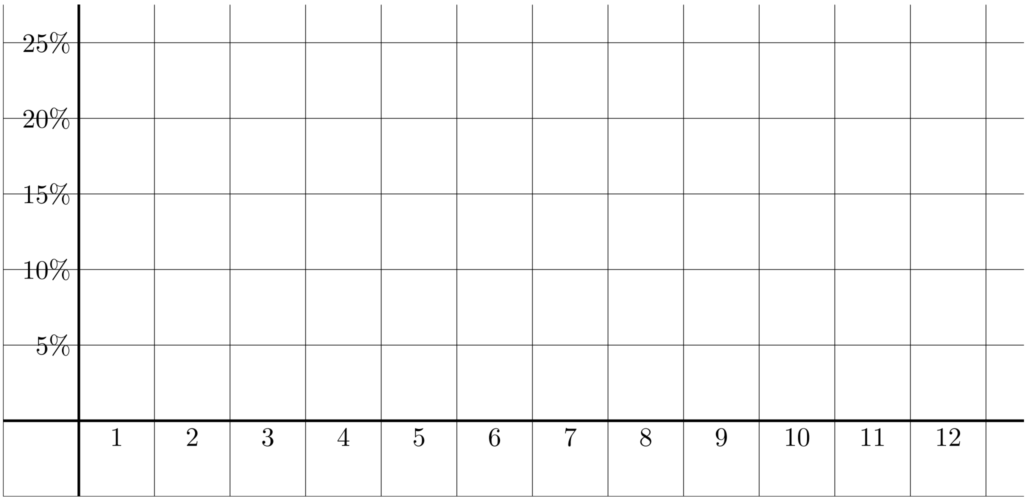
issue	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
effectif												50
fréq. (%)												100%



4. Faire 50 lancers supplémentaires et noter de la même façon les résultats obtenus dans le premier tableau. Ajouter ces résultats à ceux de la question 3 pour obtenir un tableau récapitulant les résultats pour vos 100 lancers. Puis, à partir de ce nouvel **échantillon**, deux fois plus important, construire un diagramme en bâtons des fréquences relevées :

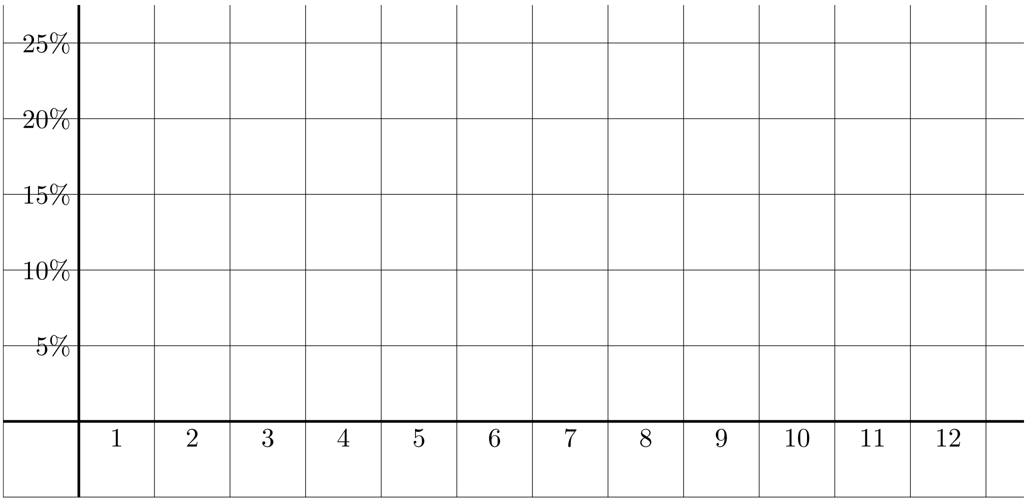
issue	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
effectif												50
fréq. (%)												100%

issue	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
effectif												100
fréq. (%)												100%



5. **Mise en commun de résultats.**
Nous allons regrouper au tableau les résultats de tous les élèves de la classe à la question précédente. En additionnant entre eux tous les résultats, on obtient un échantillon beaucoup plus gros (un échantillon de ......$\times$100 =......... lancers). Consigner les résultats dans le tableau ci-dessous, puis construire le diagramme en bâtons des fréquences relevées (construire des bâtons de largeur un demi-carreau espacés d'un demi-carreau aussi).

issue	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
effectif												
fréq. (%)												100%



6. **Prévision théorique des résultats.**
Nous avons trouvé des fréquences « expérimentales » de réalisation de chacune des issues de cette expérience aléatoire. Ici, il est même possible de trouver les fréquences théoriques en utilisant un raisonnement très simple ; nous pourrons alors comparer ce que prévoit la théorie avec nos différents relevés.
Imaginons donc que nous avons un dé bleu et un dé rouge. Le tableau ci-dessous va nous permettre d'écrire tous les résultats envisageables (en premier, le résultat sur le dé bleu ; en second celui du dé rouge) ; compléter :

Résultats

$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$	$(1;4)$	$(1;5)$	$(1;6)$
$(2;1)$					

Somme des deux dés

2	3	4	5	6	7
3					

7. **Comparaison avec l'expérimentation**
   On s'aperçoit alors qu'il y a, par exemple, trois façons d'obtenir le résultat 4 : $(1;3)$, $(2;2)$ et $(3;1)$. Comme il y a 36 résultats possibles (36 cases dans chaque tableau), l'issue "4" a donc une fréquence théorique de réalisation qui est égale à $\frac{3}{36} = \frac{1}{12} \approx 0{,}083$, c'est-à-dire 8,3% environ. Compléter ainsi le tableau ci-dessous, et faire le diagramme en bâtons des fréquences qui correspond sur le même graphique que celui de la question 5.

issue	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
fréq. théo.			8,3%									100%

2 Le lièvre et la tortue

Au cours de cette activité nous allons simuler une course entre un lièvre et une tortue d'abord à l'aide de la calculatrice, puis du tableur.

2.1 Les règles du jeu

Une partie se déroule ainsi :
- On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6.
  - si le dé tombe sur 1, 2, 3, 4 ou 5, la tortue avance d'une case ;
  - si le dé tombe sur 6, le lièvre avance de 5 cases.
- Le gagnant est le premier des deux qui arrive sur la cinquième case. Le lièvre est donc gagnant si le six tombe une fois au cours des cinq premiers jets de dé ; dans le cas contraire, c'est la tortue la gagnante.

2.2 À la calculatrice

Nous allons d'abord simuler trois parties à l'aide de la calculatrice. Pour cela, nous avons besoin de simuler un jet de dé à six faces, autrement dit nous avons besoin d'un nombre entier aléatoire compris entre 1 et 6.
- Avec une calculatrice type collège :
  - TI30 : menu `PRB` puis `RANDI`, puis `1,6)` et enfin `ENTER` affiche un nombre aléatoire entier compris entre 1 et 6.
  - Casio : on obtient un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 par la fonction `Ran#`. Si le chiffre des dixièmes est compris entre 1 et 6, on considère que c'est le premier dé. Si le chiffre des centièmes

est compris entre 1 et 6, on considère que c'est le dé suivant, ... ; jusqu'à obtenir le nombre de lancers nécessaires.
– Avec une calculatrice graphique :
  – Casio : écrire `1+`, puis `OPT`, menu `NUM` puis `Int(6` $\times$ et enfin `OPT PROBA RAN#)`
  – TI : touche `MATH` menu `PRB` et fonction `RandInt` saisir ensuite `1,6)` et `ENTER`.

On regroupe les résultats de la partie dans le tableau suivant (la durée est le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un gagnant) :

partie	dé 1	dé 2	dé 3	dé 4	dé 5	lièvre gagne	tortue gagne	durée
1								
2								
3								

Résultats de la classe :
Sur ...... parties, la tortue a gagné ...... fois et le lièvre ...... fois.
La tortue a donc gagné dans ...... % des parties.

2.3 Au tableur

Nous allons maintenant utiliser le tableur pour simuler cinquante parties. Pour commencer, paramétrons le tableur de façon à ce que la feuille de calcul ne soit pas réactualisée à chaque modification d'une cellule : dans le menu `Outils, Option, Calcul`, cocher la case `Calcul sur ordre`. Pour effectuer les calculs des formules, il suffira alors d'appuyer sur la touche `F9`.

Quelques fonctions du tableur qui nous seront utiles :
– `ENT()` renvoie la partie entière d'un nombre ;
– `ALEA()` renvoie un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 ;
– `SI(test;val1;val2)` renvoie la valeur `val1` si le `test` est vrai et la valeur `val2` sinon ;
– `NB.SI(plage;valeur)` renvoie le nombre de cellules de la `plage` qui sont égales à `valeur` ;
– `MIN(val1;val2)` renvoie la plus petite des deux valeurs `val1` et `val2`.

Recopier le tableau suivant dans une feuille de calculs :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	partie	dé 1	dé 2	dé 3	dé 4	dé 5	gagnant	durée
2	1							
3	2							
...	......							
51	50							
52							lièvre	
53							tortue	
54							moyenne	

1. Dans la colonne `dé 1`, on saisit `=ENT(ALEA()*6)+1` pour obtenir une simulation de lancer de dé ; formule qu'on recopie vers le bas pour obtenir les vingt premiers lancers de nos parties.
   Appuyer sur `F9` afin de vérifier que le tableur « recalcule » bien des nouveaux dés.

2. Dans la colonne `dé 2` on souhaite maintenant afficher un nouveau nombre aléatoire si le dé 1 est inférieur ou égal à 5 et afficher 6 sinon. Écrire une formule permettant de réaliser ceci ; formule à recopier vers le bas et vers la droite pour simuler les dés 3, 4 et 5 des vingt parties.
3. Finalement la tortue est gagnante si le nombre inscrit dans la case `dé 5` est inférieur ou égal à 5. Écrire alors une formule qui affiche dans la colonne `gagnant` le nom [3] du gagnant de la partie. Recopier cette formule vers le bas.
4. Écrire une formule dans la cellule `H2` permettant de calculer la durée de la partie. Recopier cette formule vers le bas.
5. Écrire dans les cellules `H52` et `H53` les formules permettant de calculer le nombre de victoires de chacun des deux participants.
6. Enfin, écrire dans la cellule `H54` la formule permettant de déterminer la durée moyenne des parties (facile !).

Résultats de la classe :
Sur . . . . . . parties, la tortue a gagné . . . . . . fois et le lièvre . . . . . . fois.
La tortue a donc gagné dans . . . . . . % des parties.

3 Échantillonnage

Exercice 1.
Dans un pays, un quart de la population a les yeux bleus. On choisit au hasard 200 individus de ce pays. On note p la proportion des individus de l'échantillon ayant les yeux bleus. Au seuil de 95 %, à quel intervalle de fluctuation appartient p ?

Exercice 2.
Une machine découpe des planches ; 20 % en taille 1 et le reste en taille 2. Afin de tester le bon fonctionnement on prélève 40 planches à la sortie de la machine ; parmi elles, 11 sont à la taille 1. Doit-on s'inquiéter sur le fonctionnement de la machine ?

Exercice 3.
Dans un pays lointain, une Assemblée de représentants de la population est constituée de 577 députés dont 313 femmes.. On se demande si cette Assemblée respecte la parité hommes-femmes.

1. Comment simuler à l'aide de la calculatrice ou de l'ordinateur un échantillon de 577 personnes de la population de ce pays ? (On considère que dans ce pays il y a autant d'hommes que de femmes.) On pourra écrire un algorithme qui affiche la fréquence de femmes dans l'échantillon.
2. À quel intervalle de confiance à 95 % cette fréquence doit-elle appartenir ?
3. À l'aide de la calculatrice ou du tableur, simuler 100 échantillons de 577 personnes et compter ceux qui appartiennent à l'intervalle $[0{,}45 ; 0{,}55]$.
4. Au niveau 95 %, l'Assemblée de 313 femmes et 264 hommes respecte-t-elle la parité ?

3. lièvre ou tortue

Chapitre 14

Trigonométrie

Chapitre 15

Algorithmique

Le mot *algorithme* vient du nom de l'auteur persan Al-Khuwarizmi (né vers 780 - mort vers 850) qui a écrit en langue arabe le plus ancien traité d'algèbre « abrégé de calcul par la complétion et la simplification [1] » dans lequel il décrivait des procédés de calcul à suivre étape par étape pour résoudre des problèmes ramenés à des équations [2].
On définit parfois les algorithmes de la manière suivante : « un algorithme est une suite finie de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données pour arriver, en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat et cela indépendamment des données ». Le résultat doit donc s'obtenir en un temps fini.
Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la notion de *variable*. Une variable est une sorte de « boîte » dans laquelle on peut stocker une information (texte, nombre, liste de nombres, figure,...) ; une variable est nommée (elle a un nom) par exemple `MaVariable`, `a`, `Nombre1`, ... sont des noms de variables. Dans un algorithme, « $a \leftarrow b$ » signifie que le contenu de la « boîte » b vient se mettre à la place du contenu de la « boîte » a. À noter que le contenu initial de b reste aussi dans b il est en quelque sorte recopié dans a.
Dans une première partie nous écrirons un algorithme permettant de ranger une liste de nombres dans l'ordre croissant puis nous nous initierons à la programmation avec le logiciel Xcas que vous pouvez télécharger gratuitement sur internet (dans un moteur de recherche, « Xcas » donne le lien de téléchargement).

1 Le tri à bulles

Cette partie provient largement d'une activité proposée sur le site internet de l'irem de Lille par Jean-Marc Duquesnoy et Raymond Moché.
Le tri à bulles ou tri par propagation est un algorithme de tri qui consiste à faire remonter progressivement les plus grands éléments d'une liste, comme les bulles d'air remontent à la surface d'un liquide. L'algorithme parcourt la liste, et compare les couples d'éléments successifs. Lorsque deux éléments successifs ne sont pas dans l'ordre croissant, ils sont échangés. Après chaque parcours complet de la liste, l'algorithme recommence l'opération. Lorsqu'aucun échange n'a lieu pendant un parcours, cela signifie que la liste est triée : l'algorithme peut s'arrêter. (Source : Wikipédia)

1. Apparemment, on peut ranger deux nombres donnés a et b à l'aide de l'algorithme suivant :

1. Le mot arabe utilisé pour nommer la complétion ou restauration se lit Al-Jabr, ce qui donna naissance à notre mot algèbre.
2. Notamment, les équations du segond degré.

```
Entrées :
nombres a et b ;
Sorties :
minimum puis maximum des nombres a et b ;
début
    si a > b alors
        a ← b ;
        b ← a ;
    fin
    Afficher a, b
fin
```

Algorithme 6 : écrire deux nombres a et b dans l'ordre croissant ?

En sortie, on demande d'afficher successivement les contenus des cases a et b.
Question - Pourquoi cet algorithme est-il incorrect ? Quel résultat donne-t-il ? (Prendre par exemple au départ $a = 5$ et $b = 3$.)

2. Voici un algorithme correct pour ordonner a et b dans l'ordre croissant :

```
Entrées :
nombres a et b ;
Sorties :
minimum puis maximum des nombres a et b ;
début
    si a > b alors
        échanger a et b ;
    fin
    Afficher a, b
fin
```

Algorithme 7 : écrire deux nombres a et b dans l'ordre croissant

On voit que le problème est d'échanger le contenu des deux variables a et b.
Question - Donner une solution utilisant une variable auxiliaire c. La réponse sera donnée en complétant le cadre vide de l'algorithme ci-dessous :

```
Entrées :
nombres a et b ;
Sorties :
minimum puis maximum des nombres a et b ;
début
    si a > b alors

    fin
    Afficher a, b
fin
```

Algorithme 8 : écrire deux nombres a et b dans l'ordre croissant

3. Complément : que fait l'algorithme suivant ? Quel est son avantage par rapport au précédent ?

```
Entrées :
nombres a et b ;
Sorties :
minimum puis maximum des nombres a et b ;
début
    si a > b alors
        a ← a + b ;
        b ← a − b ;
        a ← a − b ;
    fin
    Afficher a, b
fin
```

Algorithme 9 : écrire deux nombres a et b . . . .

4. **Qu'est-ce que le « tri à bulles » ?**

Supposons que l'on ait à ordonner dans l'ordre croissant la liste

$$A = (5,\ 1,\ 4,\ 8,\ 2).$$

La *manipulation de base* du « tri à bulles » consiste à examiner *successivement* les couples formés par les nombres de rang 1 et 2, puis par les nombres de rang 2 et 3 et ainsi de suite jusqu'à la fin et de leur appliquer le traitement suivant :

> On laisse inchangé tout couple qui est déjà rangé dans l'ordre croissant ; dans le cas contraire, on échange ses 2 termes.

Voici les transformations successives subies par A au cours de ce processus :

$$A = (\underline{5,1},\ 4,\ 8,\ 2) \to (1,\ \underline{5,4},\ 8,\ 2) \to (1,\ 4,\ \underline{5,8},\ 2) \to (1,\ 4,\ 5,\ \underline{8,2}) \to B = (1,\ 4,\ 5,\ 2,\ 8)$$

La liste B n'est pas ordonnée dans l'ordre croissant mais *nous avons fait des progrès* dans le classement car le maximum de 5, 1, 4, 8, 2, qui est 8, se trouve maintenant à la fin de la liste, qui est sa place définitive.

Cela conduit naturellement à appliquer à B la *manipulation de base*. Voici ce que cela donne

$$B = (\underline{1,4},\ 5,\ 2,\ 8) \to (1,\ \underline{4,5},\ 2,\ 8) \to (1,\ 4,\ \underline{5,2},\ 8) \to (1,\ 4,\ 2,\ \underline{5,8}) \to C = (1,\ 4,\ 2,\ 5,\ 8)$$

C'est mieux car les deux derniers termes sont maintenant à leurs places définitives. Recommençons en appliquant la manipulation de base à C :

$$C = (\underline{1,4},\ 2,\ 5,\ 8) \to (1,\ \underline{4,2},\ 5,\ 8) \to (1,\ 2,\ \underline{4,5},\ 8) \to (1,\ 2,\ 4,\ \underline{5,8}) \to (1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8)$$

On voit que le rangement de A dans l'ordre croissant est terminé. Pour cela, on a dû appliquer trois fois la manipulation de base.

Si on imagine maintenant que A est une liste quelconque de $n \geq 2$ nombres quelconques, il est clair qu'après une première application de la *manipulation de base*, le dernier terme du nouvel état de A sera à sa place définitive ; après la seconde application de la *manipulation de base*, les deux derniers termes seront à leurs places définitives, et ainsi de suite. Par conséquent, après la $(n-1)^{\text{ème}}$ application de la *manipulation de base*, les $(n-1)$ derniers termes - et par conséquent le premier - seront à leurs places définitives, ce qui veut dire que le rangement sera terminé. L'exemple $A = (5,\ 1,\ 4,\ 8,\ 2)$ montre que, quelquefois, il n'y a pas besoin d'effectuer les $(n-1)$ applications de la *manipulation de base*.

Question : combien faut-il de *manipulations de base* pour ranger 5, 4, 3, 2, 1 dans l'ordre croissant ?

> Nous retiendrons que nous sommes sûrs que A est rangé dans l'ordre croissant au bout de $(n-1)$ *manipulations de base*.

5. Voici l'algorithme du « tri à bulles », en langage naturel :

Entrées :
$A = a_1, \ldots, a_n$, liste d'au moins deux nombres ;
Sorties :
la liste obtenue en rangeant A dans l'ordre croissant ;
début
    $n \leftarrow$ longueur de la liste A ;
    pour $k = 1, \ldots, (n-1)$ **faire**
        pour $j = 1, \ldots, (n-k)$ **faire**
            si $a_j > a_{j+1}$ **alors**
                $c \leftarrow a_j$;
                $a_j \leftarrow a_{j+1}$;
                $a_{j+1} \leftarrow c$
            fin
        fin
    fin
    Afficher A
fin

Algorithme 10 : Algorithme du tri à bulles

Questions :

a. peut-on l'améliorer de sorte que le traitement aille plus vite ?

b. modifier cet algorithme pour que l'état initial de la liste A soit conservé et affiché en même temps que le résultat.

2 Avec Xcas

2.1 Le logiciel Xcas

Xcas est un logiciel de mathématiques « multi-fonctions » : il permet de calculer (avec des nombres et même avec des lettres !), de tracer des courbes, de construire des figures, de programmer, et plein d'autres choses. Nous allons, ici, l'utiliser pour programmer.
Au lancement, on obtient un écran qui ressemble[3] à la figure 2.1 (page 67). En saisissant `2+2`, puis Entrée, ça confirme ce que je disais précédemment : il sait calculer !
En saisissant `developper((a+b)^2)`, il développe l'identité remarquable !
Bon, placez-vous maintenant sur une ligne vide, et cliquer sur `Prg` puis sur `Nouveau Programme` ; effacer le « :; » s'il existe. Vous êtes prêts à programmer.

3. Cela dépend de votre ordinateur, de votre système d'expoitation et de votre version de Xcas.

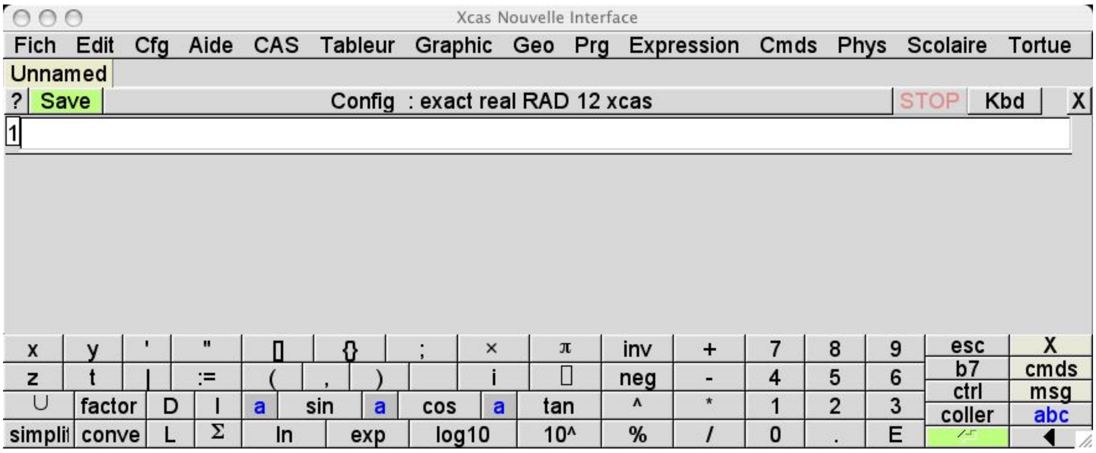


FIGURE 15.1 – Fenêtre de démarrage Xcas

2.2 Premiers programmes

2.2.1 Échangisme !

Pour créer un programme, il faut lui donner un nom, par exemple `Echange` et lui indiquer les variables dont il a besoin (ici deux nombres a et b à « échanger »). Pour cela, on écrit : `Echange(a,b):={`
On écrira notre programme après l'accolade ouvrante `{` et on le conclura par une accolade fermante `}` (qu'on peut écrire tout de suite pour ne pas l'oublier...).
Avec Xcas, *l'affectation* c'est-à-dire le « remplissage d'une boîte » par une information (ce qu'on indiquait dans les algorithmes par « ← ») se fait avec « `:=` ». Ainsi pour affecter à la variable c le nombre 5 on écrit `c:=5;` (**Chaque instruction du programme doit se terminer par un « ; »**).
Écrivons la partie de programme de l'algorithme 6 qui devait échanger les contenus des variables a et b :

```
Echange(a,b):={// Tout ce qui est placé après deux "/" est ignoré par Xcas
a:=b;// Il est important de commenter ses programmes.
b:=a;
return a,b;// l'instruction return permet de renvoyer un résultat à l'utilisateur
}
```

Une fois le programme écrit, il faut le *compiler*[4] en cliquant sur `OK`. Si tout se passe bien, un message « `Success compiling Echange` » apparaît. Dans une nouvelle ligne, taper `Echange(5,3)` et constater que l'algorithme 6 était bien faux !
Il reste à le corriger (à l'aide des algorithmes 8 ou 9 au choix) pour qu'il soit correct, le compiler à nouveau, et le tester : au boulot !
Pour enregistrer ce programme, Cliquer sur `Prog` (juste à côté du numéro de la ligne où vous avez écrit votre programme), puis sur `Sauver comme`. Sélectionner le dossier `Mes documents` et saisir le nom `Echange`.
Remarque : avec Xcas, l'instruction `a,b:=b,a` échange directement les contenus des variables a et b.

4. La compilation est la traduction du programme écrit dans le language de programmation en instructions que l'ordinateur peut exécuter.

2.2.2 Tri croissant de deux nombres

Placer le curseur sur une nouvelle ligne blanche vide. Créer un nouveau programme par le menu `Prg` puis `Nouveau`.
Saisir alors `TriCroissant(a,b):={` et écrire le programme correspondant à l'algorithme 9.
Pour la condition **Si...** , cliquer sur `ajouter` puis sur `test` et enfin sur `si alors sinon`. Il reste à compléter les « blancs ».
Si l'option en français n'est pas disponible, il faut sélectionner `If [Then] Else`, mettre la condition dans les parenthèses, les instructions si la condition est remplie dans les premières accolades et les instructions du sinon dans les deuxièmes accolades.
Par exemple un programme qui testerait si deux nombres sont égaux s'écrirait :

En français :

```
Egalite(a,b):={
si a==b alors//test d'égalité : "=="
  afficher("ils sont égaux");
sinon
  afficher("ils sont différents");
fsi;
}// Fin du programme
```

En anglais :

```
Egalite(a,b):={
if (a==b) {// début du "oui"
  afficher("ils sont égaux")}// fin
else {// début du "sinon
  afficher("ils sont différents");
}// fin du sinon
}// fin du programme
```

2.3 Le tri à bulles

Quelques compléments de programmation :
Nous allons travailler avec des listes de nombres. La liste A contenant les nombres 5, 4, 3, 2 et 1 se crée dans une ligne vierge par la commande `A:=(5,4,3,2,1)`. On a alors `A[0]` qui vaut 5, `A[1]` qui vaut 4, ... **Attention :** `A[k]` donne le $k+1^{\text{e}}$ nombre de la liste (car on commence à 0) !
Pour connaître le nombre d'éléments d'une liste A, on a la commande `size(A)`.
Pour ajouter 7 et 6 à la fin de la liste A : `concat(A,7,6)`.
L'instruction **Pour ...** des algorithmes s'obtient en cliquant sur `Ajouter`, puis sur `Loop` et enfin sur `pour` (ou `for`). Il reste alors à compléter les « blancs ».

Au travail : écrire le programme `TriABulles` qui traduit l'algorithme 10 en langage Xcas. Attention aux indices (il faudra peut-être modifier un peu l'algorithme à cause des contraintes de programmation) !

Utilisation du programme

1. À l'aide de cet algorithme, ranger $A = (5, 1, 4, 8, 2)$ dans l'ordre croissant.
2. Mettre 20 entiers au hasard entre 0 et 100 dans la liste A par la commande :
   `A:=seq(hasard(100),k,1,20)` ; cette commande répète pour k allant de 1 à 20 l'instruction `hasard(100)` qui, elle, donne un entier au hasard entre 0 (compris) et 100 (exclu). La commande `hasard(a,b)` donne un nombre (décimal) au hasard de l'intervalle $[a\,;\,b[$.
   Les ranger dans l'ordre croissant grâce au programme `TriABulles`.
3. Recommencer avec 300 entiers au hasard compris entre 0 et 1000. Que peut-on dire du temps mis par le programme pour réaliser le tri ?
   Recommencer le tri en utilisant la fonction pré-programmée « trier » de Xcas grâce à la commande `sort(A)`. Que constate-t-on ? Que peut-on en déduire pour l'efficacité du tri à bulles ?

Table des matières

Liste des Algorithmes