Chapitre 3 : Généralités sur les fonctions

1 Introduction : exemples

Exemple 1 (le banquier)
Un banquier propose un livret d'épargne qui rapporte 3% d'intérêts par an. À la fin de l'année chaque titulaire d'un tel livret reçoit en plus des intérêts la somme de 10 €.

1. Calculer la somme disponible après un an si on place 100 € en début d'année.
2. Même question pour un placement de 250 €.
3. Le banquier a 150 clients possèdant un tel livret. S'il note x le montant placé en début d'année par un client, exprimer le montant $S(x)$ disponible après un an.

Réponses :

1. La somme disponible après un an est :
$$S = 100 + \frac{3}{100} \times 100 + 10 = 113€$$
2. La somme disponible après un an est :
$$S = 250 + \frac{3}{100} \times 250 + 10 = 267{,}50€$$
3. La somme disponible est :
$$S(x) = x + \frac{3}{100} \times x + 10 = 1,03x + 10$$

La somme disponible après un an $S(x)$ dépend de la valeur de x on dit que S est une *fonction* de x.

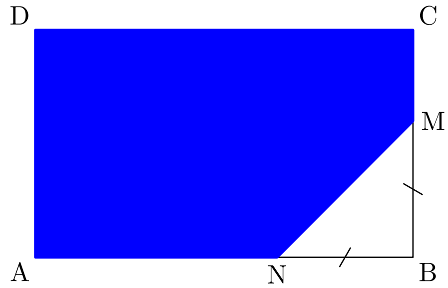
Remarque 1
Dans un tableur, le banquier peut compléter une feuille de calculs comme ceci :

B3 f(x) Σ = =A3*1,03+10

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	Montant placé	Montant après un an						
3	100,00	113,00						
4	250,00	267,50						
5	500,00	525,00						
6	218,00	234,54						
7	23,00	33,69						
8	36 000,00	37 090,00						
9	230,50	247,42						

Dans la cellule `B3` on a écrit `A3+0,03*A3+10` ; puis on a recopié cette formule vers le bas.

Exemple 2 (géométrie)
On a tracé ci-dessous un rectangle $ABCD$ tel que $AD = 3$ cm et $AB = 5$ cm. M est un point du segment $[BC]$. N est le point de $[BA]$ tel que $BN = BM$.



1. Calculer l'aire délimitée par le pentagone $ANMCD$ lorsque $BM = 1$ cm.
2. Même question lorsque $BM = 2$ cm.
3. On pose maintenant $BM = x$. Exprimer l'aire $\mathscr{A}(x)$ de $ANMCD$ en fonction de x.

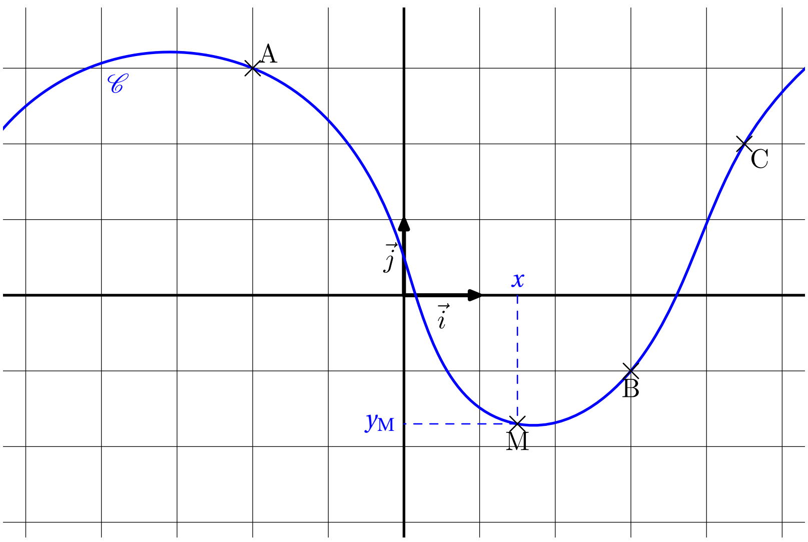
Réponses :

1. L'aire de $ANMCD$ est égale à l'aire de $ABCD$ moins l'aire de BMN. Donc :
$$\mathscr{A} = 5 \times 3 - \frac{1 \times 1}{2} = 14{,}5 \text{ cm}^2$$
2. De même :
$$\mathscr{A}' = 5 \times 3 - \frac{2 \times 2}{2} = 13 \text{ cm}^2$$
3. Si $BM = x$, l'aire de BNM vaut $\frac{x \times x}{2}$. Donc :
$$\mathscr{A}(x) = 5 \times 3 - \frac{x \times x}{2} = 15 - \frac{1}{2}x^2$$

L'aire $\mathscr{A}(x)$ dépend de la valeur de x on dit que $\mathscr{A}$ est une *fonction* de x.

Exemple 3

Sur la figure ci-dessous, on a tracé une courbe dans un repère.



On note A, B et C les points de la courbe d'abscisses respectives -2, 3 et $\frac{9}{2}$.
Lire l'ordonnée de chacun des points A, B et C.
On a : $y_A = 3$, $y_B = -1$ et $y_C = 2$.
De même, pour tout point M d'abscisse x de la courbe, on peut lire son ordonnée y_M. L'ordonnée de M dépend de x. On dit que c'est une *fonction* de x.

2 Généralisation : notion de fonction

2.1 Définition

Définition 1
Si à chaque valeur de x d'un ensemble D on associe un autre nombre noté $f(x)$ déterminé par une relation algébrique, géométrique,... on dit qu'on définit une *fonction numérique* f. On dit que f est la fonction définie par $f(x) = \dots$. On note :

$$f : x \longmapsto f(x)$$

- Pour chaque x de D, le nombre $f(x)$ est appelé *image* de x par la fonction f. L'image d'un nombre x est unique.
- Le nombre x est appelé un *antécédent* de $f(x)$ par la fonction f.

Exemple 4
La fonction f est définie sur l'intervalle $[-5\,;\,7]$ par $f(x) = x^2 - 2x - 1$ signifie que si on se donne une valeur de x dans l'intervalle $[-5\,;\,7]$, on peut calculer son image par la fonction f grâce à l'expression donnée :
- on a : $f(-3) = (-3)^2 - 2 \times (-3) - 1 = 9 + 6 - 1 = 14$,
- on peut dire aussi que l'image par f de 0 est -1 (car $f(0) = 0^2 - 2 \times 0 - 1 = -1$),
- on dit aussi 5 est un antécédent de 14 car $f(5) = 5^2 - 2 \times 5 - 1 = 14$.

Remarque 2 (Attention !)
Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble D. Pour chaque $x \in D$, il n'existe qu'une seule image de x par f. Par contre un nombre y peut avoir plusieurs antécédents par la fonction f.

Exemple 5
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 + 2$.
Pour tout réel x, il existe une seule image de x par f : c'est le nombre qu'on obtient en calculant $(x+1)^2 + 2$.
Par contre on a :

$$f(2) = (2+1)^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11 \text{ et } f(-4) = (-4+1)^2 + 2 = (-3)^2 + 2 = 9 + 2 = 11$$

Ainsi 2 et -4 sont deux antécédents de 11.
On peut remarquer aussi que certains nombres n'ont pas d'antécédent. En reprenant la fonction f, le nombre 0 n'a pas d'antécédent.
En effet, $(x+1)^2$ est toujours positif ou nul donc $(x+1)^2 + 2$ est toujours supérieur ou égal à 2 : il ne peut pas valoir 0.

2.2 Ensemble de définition. Valeurs interdites

Définition 2
Soit f une fonction numérique. L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on peut calculer $f(x)$ est appelé *ensemble de définition* de la fonction f. On le note généralement $\mathscr{D}_f$.
Les valeurs pour lesquelles on ne peut pas calculer $f(x)$ sont appelées *valeurs interdites* de la fonction f.

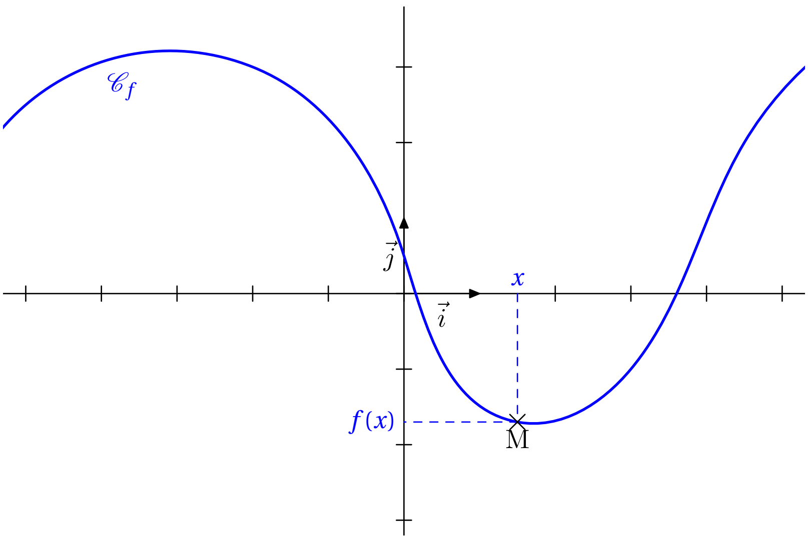
Exemple 6

– Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$. On ne peut calculer $f(x)$ si $x - 3 = 0$: la division par 0 n'existe pas. Ainsi $x = 3$ est une valeur interdite et l'ensemble de définition de la fonction f est : $\mathscr{D}_f =]-\infty\,;\,3[\cup]3\,;\,+\infty[= \mathbf{R} \setminus \{3\}$.
– Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x+2}$. On ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre strictement négatif. Donc pour pouvoir calculer $g(x)$ il faut que $x + 2 \geq 0$, c'est à dire que $x \geq -2$. Donc l'ensemble de définition de g est $\mathscr{D}_g = [-2\,;\,+\infty[$.
– Soit h la fonction définie par $h(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Quelque soit la valeur de x on peut calculer $2x^2 - 3x + 1$. Donc l'ensemble de définition de h est $\mathscr{D}_h = \mathbf{R}$.

Remarque 3
Parfois, l'énoncé restreint l'ensemble de définition d'une fonction. Dans l'exemple 4, la fonction f n'était définie, d'après l'énoncé, que sur $[-5\,;\,7]$: c'est son ensemble de définition. Pourtant sans cette précision dans l'énoncé, on aurait pu calculer $f(x)$ pour n'importe quelle valeur réelle de x.

2.3 Représentation graphique d'une fonction

On a vu dans l'exemple 3 qu'on peut définir une fonction à partir d'un graphique : à chaque abscisse x, on associe le nombre $f(x)$ qui est l'ordonnée du point d'abscisse x de la courbe.
Réciproquement, si on a une fonction f définie sur $\mathscr{D}_f$, à chaque nombre $x \in \mathscr{D}_f$ on associe un deuxième nombre $f(x)$. Ainsi, chaque couple $(x; f(x))$ forme les coordonnées d'un point M dans un repère. L'ensemble de tous les points M lorsque x varie dans $\mathscr{D}_f$ est appelé *représentation graphique* de la fonction f dans le repère. On la note généralement $\mathscr{C}_f$.



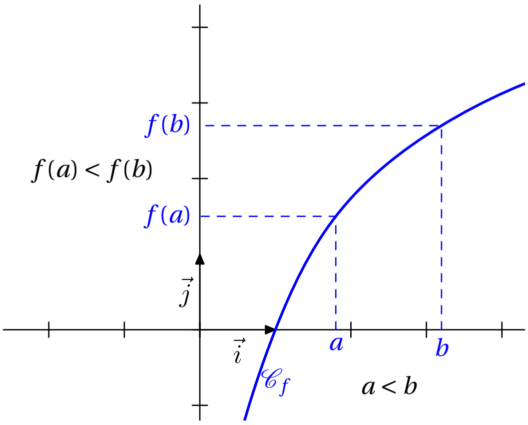
3 Variations d'une fonction

3.1 Sens de variation

Définition 3
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
– On dit que f est *strictement croissante* sur I lorsque pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
– On dit que f est *strictement décroissante* sur I lorsque pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

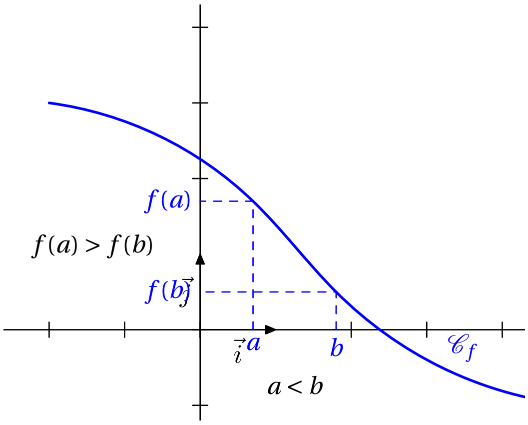
Interprétation graphique :

Fonction strictement croissante :



Pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ « monte » lorsqu'on se déplace vers la droite.

Fonction strictement décroissante :

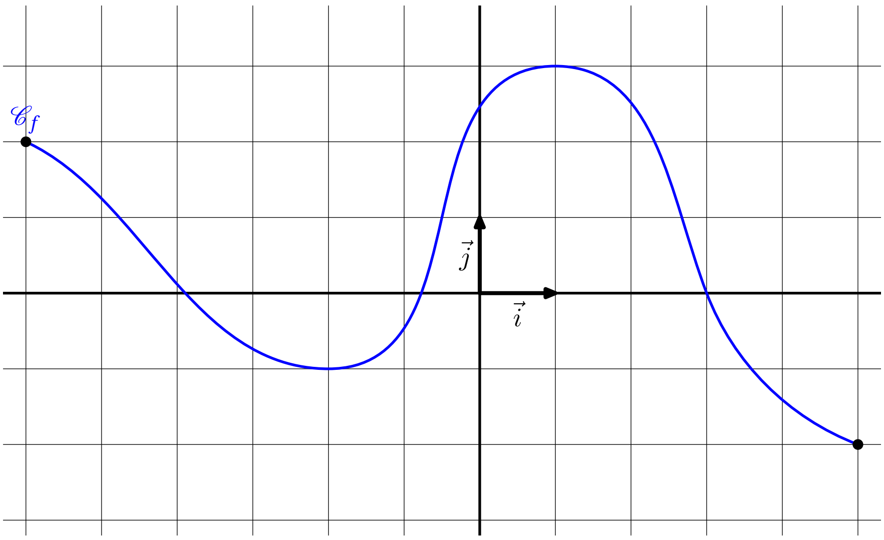


Pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ « descend » lorsqu'on se déplace vers la droite.

3.2 Tableau de variation

Définition 4
Étudier les variations d'une fonction, c'est déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est strictement croissante et ceux sur lesquels elle est strictement décroissante. On regroupe ces résultats dans un tableau appelé *tableau de variation*.

Exemple 7
On a tracé ci-dessous la courbe représentant une fonction f définie sur l'intervalle $I = [-6\,;\,5]$. En observant cette courbe, dresser le tableau de variation de f sur I.



En observant le graphique on remarque que :
- sur l'intervalle $[-6\,;\,-2]$, la courbe « descend » losqu'on se déplace de la gauche vers la droite : sur cet intervalle la fonction f est strictement décroissante.
- sur l'intervalle $[-2\,;\,1]$, la courbe « monte » losqu'on se déplace de la gauche vers la droite : sur cet intervalle la fonction f est strictement croissante.

– sur l'intervalle [1 ; 5], la courbe « descend » losqu'on se déplace de la gauche vers la droite : sur cet intervalle la fonction f est strictement décroissante.

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	-6		-2		1		5
f	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2

Les valeurs 2, -1, 3 et -2 placées dans le tableau sont les images respectives de -6, -2, 1 et 5. On les obtient ici par lecture graphique. Dans le cas où on connait l'expression de $f(x)$ en fonction de x, on les calcule.

Par convention, dans un tableau de variation, une flèche vers le bas signifie que la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle considéré et une flèche vers le haut signifie qu'elle est strictement croissante.

Remarque 4

Lorsqu'une fonction a une (ou plusieurs) valeur(s) interdite(s), on l'indique dans le tableau de variation par une double barre verticale :

prenons par exemple la fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. La fonction f a une valeur interdite : $x = 0$ et on montrera dans le chapitre **??** qu'elle est décroissante sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $\mathbf{R}_+^*$.

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

3.3 Extremums

Définition 5

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

– On dit que $f(a)$ est le maximum de f sur I si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$. On dit aussi que f atteint son maximum sur I pour $x = a$.

– On dit que $f(a)$ est le minimum de f sur I si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$. On dit aussi que f atteint son minimum sur I pour $x = a$.

Dans les deux cas on dit que $f(a)$ est un extremum.

Exemple 8

Dans l'exemple 7, le maximum de f sur $[-6 ; 3]$ est 3 ; il est atteint pour $x = 1$. Le minimum de f sur ce même intervalle est -2 ; il est atteint pour $x = 5$.

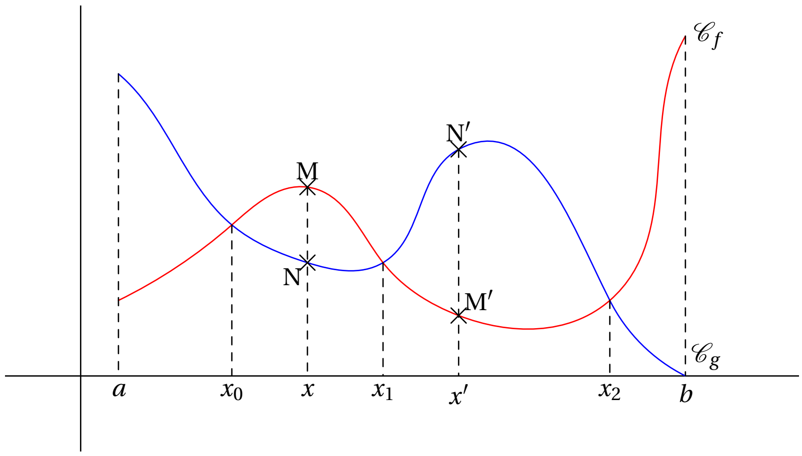
Toujours dans cet exemple, $f(-2) = -1$ est un minimum pour f sur l'intervalle $[-6 ; 1]$.

4 Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations

4.1 Cas général

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Soit $M(x; f(x))$ et $N(x; g(x))$. Dire que pour une valeur de x on a $f(x) = g(x)$ signifie que les points M et N sont confondus car il ont les mêmes coordonnées. Dire que pour une valeur de x on a $f(x) > g(x)$ signifie que M est au dessus de N car son ordonnée est supérieure à celle de N. Ainsi :
- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ c'est trouver les *abscisses* des points d'intersections de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$, c'est trouver les *abscisses* des points $M(x; f(x))$ et $N(x; g(x))$ tels que M est au dessus de N.

Exemple 9

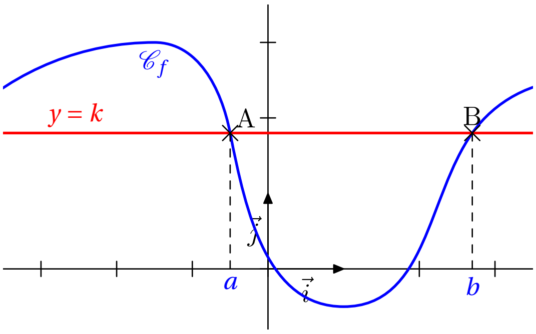


Sur la figure ci-dessus, on a tracé les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur $[a; b]$.
L'équation $f(x) = g(x)$ admet trois solutions : $\mathscr{S} = \{x_0, x_1, x_2\}$.
La solution de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ est $S = [x_0; x_1] \cup [x_2; b]$.
Par exemple, pour $x \in [x_0; x_1]$, on a bien $M(x; f(x))$ qui est au dessus de $N(x; g(x))$. Par contre pour $x' \in [x_1; x_2]$, on a $M(x'; f(x'))$ qui est en dessous de $N(x'; g(x'))$.

4.2 Cas particuliers

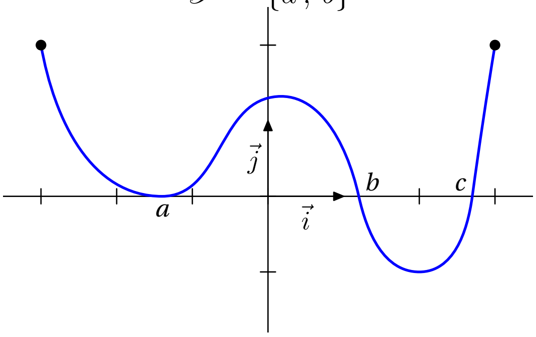
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Étudions quelques cas particuliers d'équations et d'inéquations :
- Résoudre $f(x) = k$ c'est trouver les abscisses des points d'intersections de $\mathscr{C}_f$ avec la droite d'équation $y = k$.
- Résoudre $f(x) > k$ c'est trouver les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont situés au dessus de la droite d'équation $y = k$.
- Résoudre $f(x) = 0$ c'est trouver les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
- Résoudre $f(x) \leq 0$ c'est trouver les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de l'axe des abscisses (ou à l'intersection avec l'axe des abscisses car l'inégalité est « large »).

Exemple 10
Dans chacun des cas suivants, on a tracé la représentation graphique d'une fonction f dans un repère. Déterminer graphiquement les solutions de l'équation ou de l'inéquation proposée.



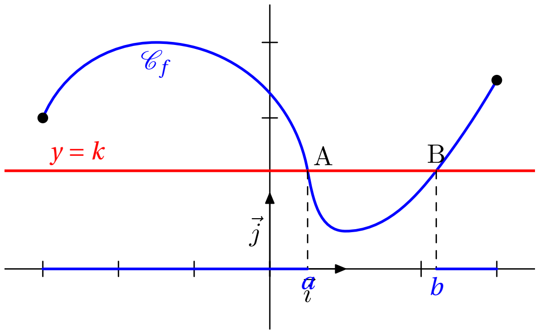
Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points A et B intersections de $\mathscr{C}_f$ avec la droite d'équation $y = k$. Donc :

$$\mathscr{S} = \{a\,;\,b\}$$



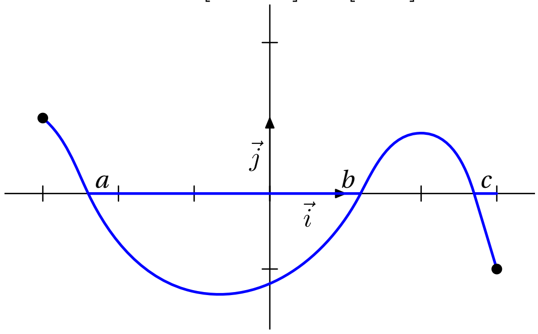
Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

$$\mathscr{S} = \{a; b; c\}$$



Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq k$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés au dessus de la droite d'équation $y = k$. Donc :

$$\mathscr{S} = [-3\,;\,a] \cup [b\,;\,3]$$



Les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés strictement en dessous de l'axe des abscisses.

$$\mathscr{S} =]a\,;\,b[\cup]c\,;\,3]$$

Définition 6
On dit qu'une fonction est *positive* sur un intervalle I si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq 0$.
On dit qu'une fonction est *négative* sur un intervalle I si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leq 0$.

Exemple 11
La fonction carrée ($f : x \mapsto x^2$) est positive sur $\mathbf{R}$.
La fonction racine carrée ($f : x \mapsto \sqrt{x}$) est positive sur $\mathbf{R}^+$.

Table des matières