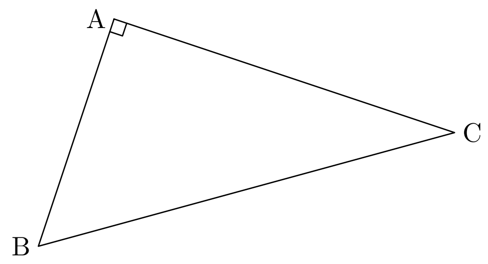
Géométrie plane : ce qu'il faut savoir

1 Triangles rectangles

1.1 Vocabulaire

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en A car (AB) et (AC) sont perpendiculaires. Le côté $[BC]$ est appelé *l'hypoténuse* du triangle rectangle, c'est le plus grand côté.
Pour l'angle aigu $\widehat{B}$, le côté $[AB]$ est le côté adjacent, et le côté $[AC]$ est le côté opposé.
Pour l'angle aigu $\widehat{C}$, le côté $[AC]$ est le côté adjacent, et le côté $[AB]$ est le côté opposé.



1.2 Théorème de Pythagore

Théorème 1
- Si un triangle est rectangle alors, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.
- Réciproquement, si dans un triangle le carré du plus grand côté égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

1.3 Cercle circonscrit

Théorème 2
Si un triangle est rectangle, alors son cercle circonscrit a pour diamètre l'hypoténuse du triangle.

Théorème 3
Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un de ses diamètres, on obtient un triangle rectangle dont l'hypoténuse est ce diamètre.

1.4 Trigonométrie

Propriété 1
Si ABC est un triangle rectangle en A, alors :

$$\cos\widehat{B} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC} \qquad \cos\widehat{C} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{C}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\sin\widehat{B} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC} \qquad \sin\widehat{C} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{C}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan\widehat{B} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{B}}{\text{côté adjacent à } \widehat{B}} = \frac{AC}{AB} \qquad \tan\widehat{C} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{C}}{\text{côté adjacent à } \widehat{C}} = \frac{AB}{AC}$$

Propriété 2
Si x est la mesure d'un angle aigu, alors on a :

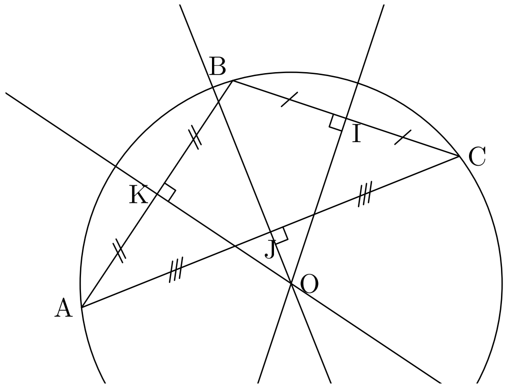
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{et} \qquad (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

2 Droites remarquables du triangle

2.1 Médiatrices

Propriété 3
Dans un triangle, les médiatrices des trois côtés sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.

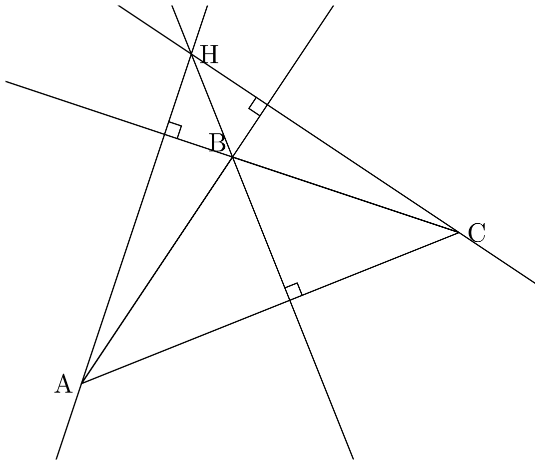
Exemple 1
Sur la figure ci-contre, O est le centre du cercle circonscrit à ABC. On a : $AO = BO = CO$.



2.2 Hauteurs

Propriété 4
Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes en un point qui est appelé l'orthocentre du triangle.

Exemple 2
Sur la figure ci-contre, H est l'orthocentre du triangle ABC.



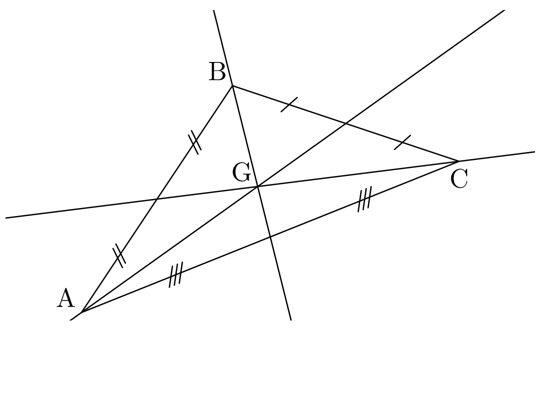
2.3 Médianes

Propriété 5
Dans un triangle, les trois médianes sont concourantes en un point qui est le centre de gravité du triangle.

Propriété 6
Le centre de gravité d'un triangle est situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane en partant du sommet.

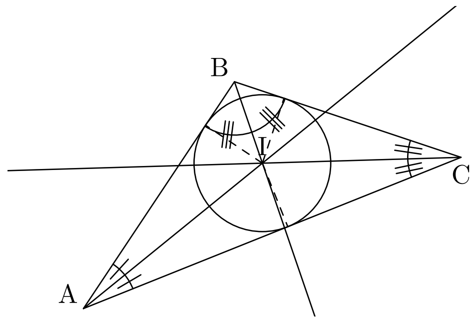
Exemple 3
ABC est un triangle de centre de gravité G, et I est le milieu de $[BC]$. On a alors :

$$\frac{AG}{AI} = \frac{2}{3} \qquad \text{ou encore :} \qquad AG = \frac{2}{3} \times AI$$



2.4 Bissectrices

Propriété 7
Dans un triangle, les bissectrices des trois angles sont concourantes en un point qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle.



3 Angle inscrit. Angle au centre

Définition 1
– On appelle *angle inscrit* dans un cercle $\mathscr{C}$ un angle $\widehat{BAC}$ formé par trois points A, B et C du cercle.
– On appelle *angle au centre* interceptant le même arc que l'angle inscrit précédent, l'angle $\widehat{BOC}$, où O est le centre du cercle $\mathscr{C}$.

Propriété 8
Dans un cercle, l'angle au centre mesure le double de chaque angle inscrit qui intercepte le même arc.

Exemple 4
Avec les notations de la définition 1, on a :

$$\widehat{BOC} = 2 \times \widehat{BAC}$$