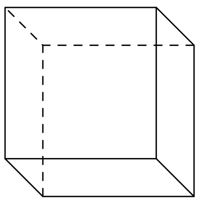
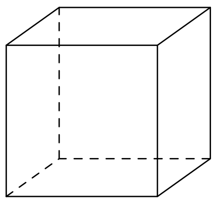
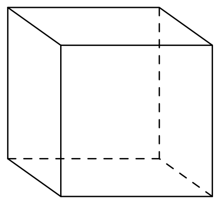
Chapitre 6 : Géométrie dans l'espace

1 La perspective cavalière

Une représentation en perspective d'un solide de l'espace (à trois dimensions) sur un plan (deux dimensions) n'est pas évidente. Il existe plusieurs types de représentations en perspective. Dans la suite, pour les dessins « à la main », nous utiliserons la perspective *cavalière*.
En fait, le résultat d'une représentation en perspective cavalière est l'ombre du solide sur un écran lorsque la source de lumière est très éloignée de l'objet. Souvent, dans une représentation en perspective cavalière une face du solide est parallèle à « l'écran » ; on dit que cette face est dans un plan *frontal*. On la représente alors en vraie grandeur ou à l'échelle. Les droites perpendiculaires à un plan frontal sont appelées *lignes de fuite*.
Lorsqu'on représente un solide en perpective cavalière, la figure obtenue n'est pas unique. Ainsi, un même cube peut avoir plusieurs représentations en perspective (cela dépend de la position de la source de lumière par rapport à l'écran) :

Propriété 1
Quelques propriétés géométriques sont toujours conservées dans une représentation en perpective cavalière :

le parallèlisme : deux droites parallèles sur le solide le sont aussi sur la représentation en perspective cavalière.

les rapports de longueurs de deux segments parallèles : si (AB) et (CD) sont deux droites parallèles d'un solide et A', B', C', D' les points représentants respectivement A, B, C, D sur la figure en perspective cavalière, alors : $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$. Les milieux sont donc conservés.

2 Positions relatives

2.1 Données essentielles

Par deux points distincts de l'espace il ne passe qu'une seule droite.
Trois points non alignés de l'espace définissent un unique plan.
On dit que deux droites sont coplanaires si elles sont dans un même plan. On peut le dire aussi de quatre points (ou plus...).

Propriété 2
Dans un plan de l'espace, toutes les propriétés de géométrie plane s'appliquent.

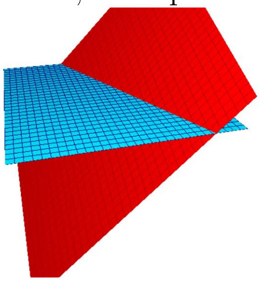
Exemple 1
$ABCDEFGH$ est un cube de côté 4 cm. On note O le point d'intersection des diagonales $[AG]$ et $[BH]$. On admet que O est leur milieu.

1. Calculer la longueur de la diagonale $[AG]$.

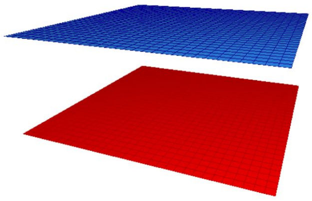
2. Le triangle GOB est-il rectangle ?
3. Les diagonales d'un cube sont-elles perpendiculaires ?

2.2 Deux plans

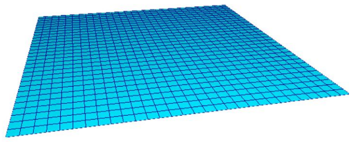
Deux plans de l'espace peuvent être sécants, strictement parallèles ou confondus. Lorsqu'ils sont sécants, deux plans se coupent suivant une droite.



Plans sécants



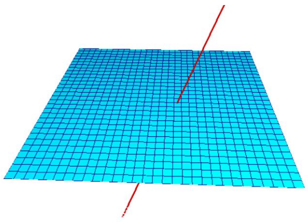
Plans parallèles



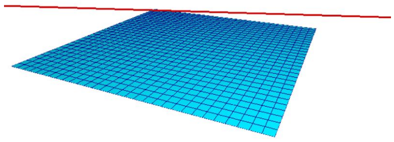
Plans confondus

2.3 Un plan et une droite

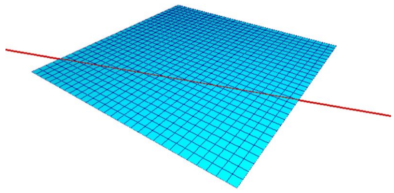
Une droite peut être sécante à un plan, elle peut être strictement parallèle au plan ou encore être contenue dans le plan :



Droite sécante au plan



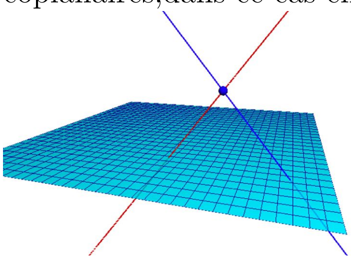
Droite parallèle au plan



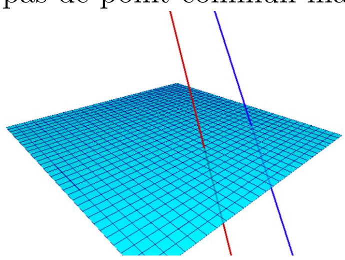
Droite contenue dans le plan

2.4 Deux droites

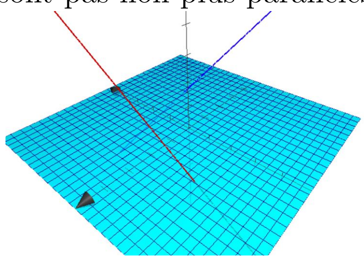
Deux droites peuvent être coplanaires, dans ce cas elles sont parallèles ou sécantes, ou alors non-coplanaires,dans ce cas elles n'ont pas de point commun mais ne sont pas non plus parallèles.



Droites sécantes

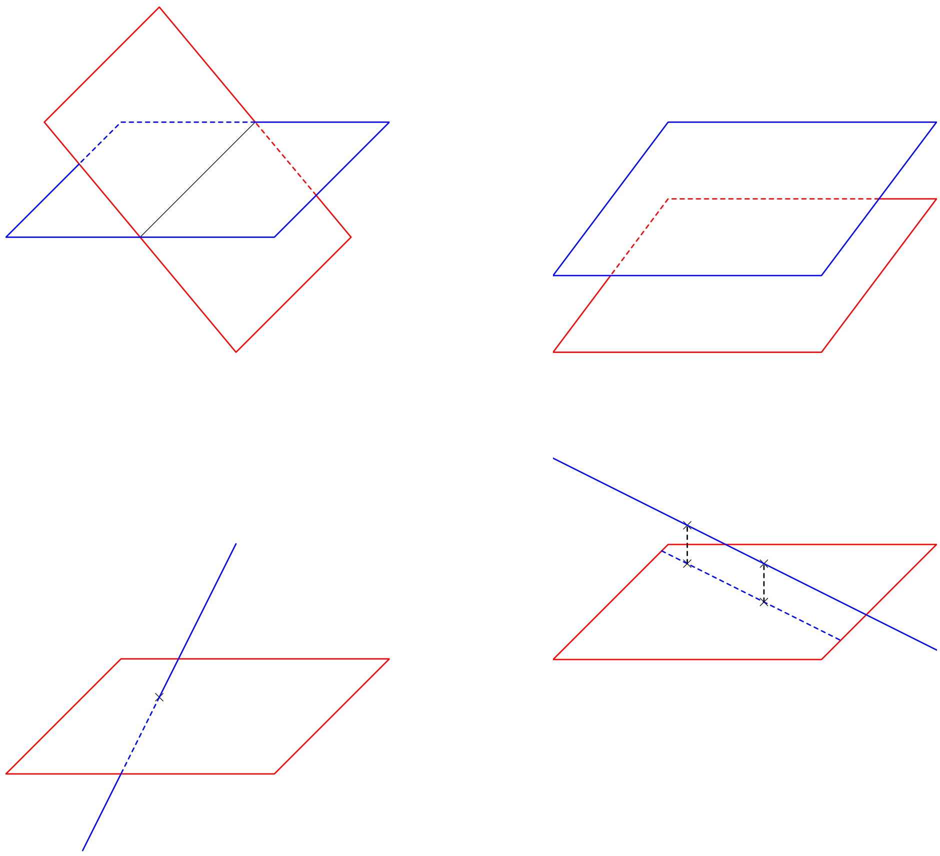


Droites parallèles



Droites non coplanaires

2.5 Quelques figures en perspective cavalière



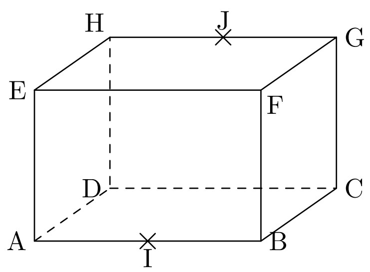
3 Parallélisme dans l'espace

Définition 1
Deux droites de l'espace sont parallèles si elles sont coplanaires et non sécantes.

Axiomes d'Euclide
– Par tout point de l'espace il passe une seule droite parallèle à une droite donnée.
– Par tout point de l'espace il passe un seul plan parallèle à un plan donné.

Exemple 2
Sur la figure ci-après, $ABCDEFGH$ est un pavé droit représenté en perspective cavalière. I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[GH]$.

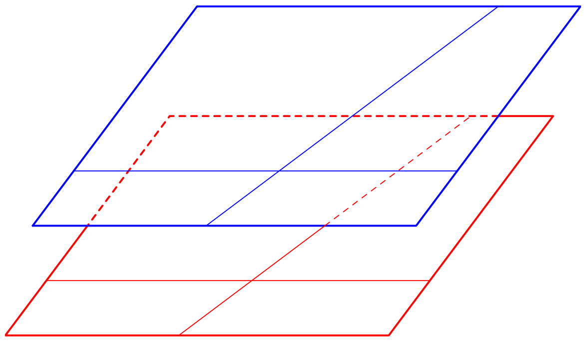
1. Citer la droite parallèle à (HF) passant par B ?
2. Quel est le plan parallèle à (IDH) passant par F ?
3. Tracer la droite parallèle à (EG) passant par B.
4. Citer trois plans parallèles à (BC) passant par E.



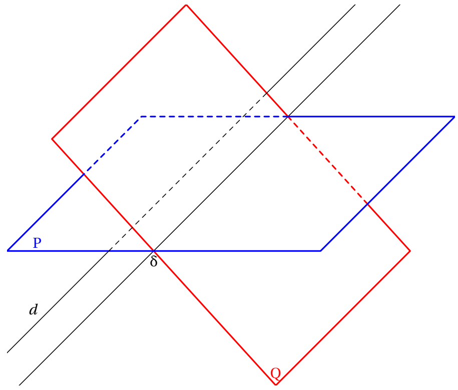
Propriété 3
– Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
– Si deux plans sont parallèles à un même troisième, alors ils sont parallèles.

Théorème 1
Si deux droites sécantes d'un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles à deux droites sécantes d'un plan $\mathscr{Q}$ alors les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles.

Théorème 2
Si deux droites de l'espace d et δ sont parallèles, alors la droite d est parallèle à tout plan contenant δ.

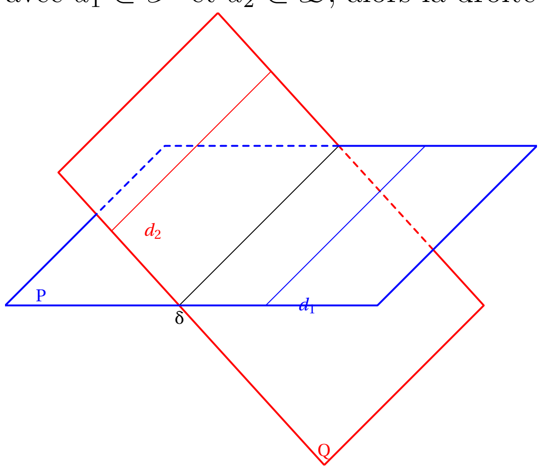


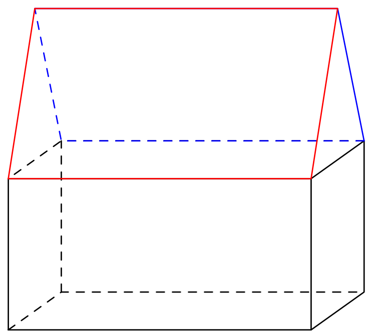
Théorème 1



Théorème 2

Théorème 3
Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux plans sécants suivant une droite δ. Si d_1 et d_2 sont deux droites parallèles avec $d_1 \subset \mathscr{P}$ et $d_2 \subset \mathscr{Q}$, alors la droite δ est parallèle aux deux droites d_1 et d_2.

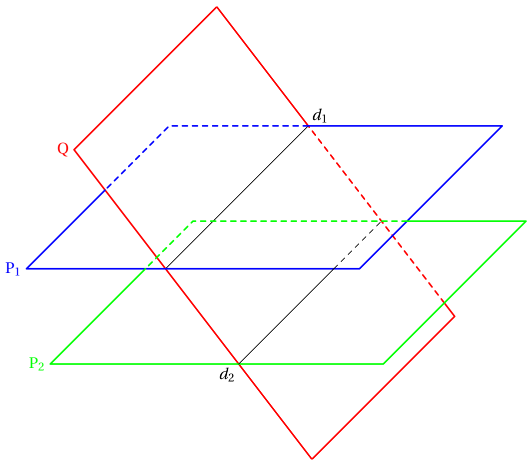




Ce théorème s'appelle parfois le *théorème du toit* : pour qu'un toit en forme de prisme droit à base triangle soit correctement posé sur une maison, il suffit que les sommets des murs opposés soit parallèles.

Théorème 4
Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont deux plans parallèles et $\mathscr{Q}$ un plan coupant $\mathscr{P}_1$ suivant une droite d_1, alors, $\mathscr{Q}$ coupe aussi $\mathscr{P}_2$ suivant une droite d_2 et de plus les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{l} \mathscr{P}_1 // \mathscr{P}_2 \\ \mathscr{Q} \cap \mathscr{P}_1 = d_1 \end{array} \right. \quad \text{alors} \left\{ \begin{array}{l} \mathscr{Q} \cap \mathscr{P}_2 = d_2 \\ d_1 // d_2 \end{array} \right.$$



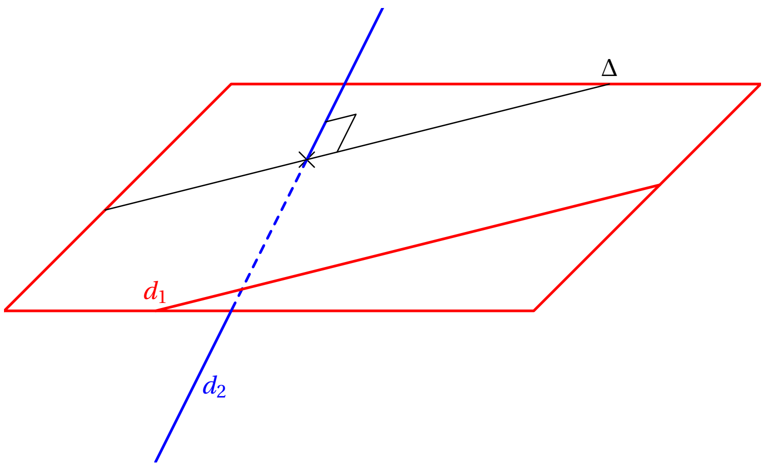
4 Orthogonalité dans l'espace

4.1 Droites orthogonales

Définition 2
Deux droites sont perpendiculaires si elles sont sécantes en formant un angle droit. Elles sont donc coplanaires.

Définition 3
Deux droites de l'espace sont dites *orthogonales* s'il existe une droite qui est parallèle à l'une et perpendiculaire à l'autre.

$$d_1 \text{ et } d_2 \text{ sont orthogonales s'il existe } \Delta \text{ telle que } \left\{ \begin{array}{l} \Delta // d_1 \\ \Delta \perp d_2 \end{array} \right.$$



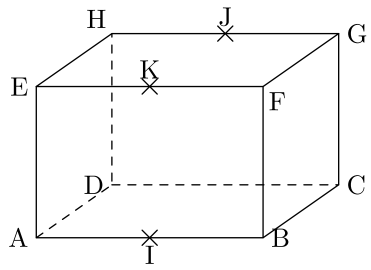
Remarque 1
- Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales.

Conséquences :
- Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est aussi orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales, toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

– *Attention :* si deux droites sont orthogonales à une même troisième droite, elles ne sont pas forcément parallèles !

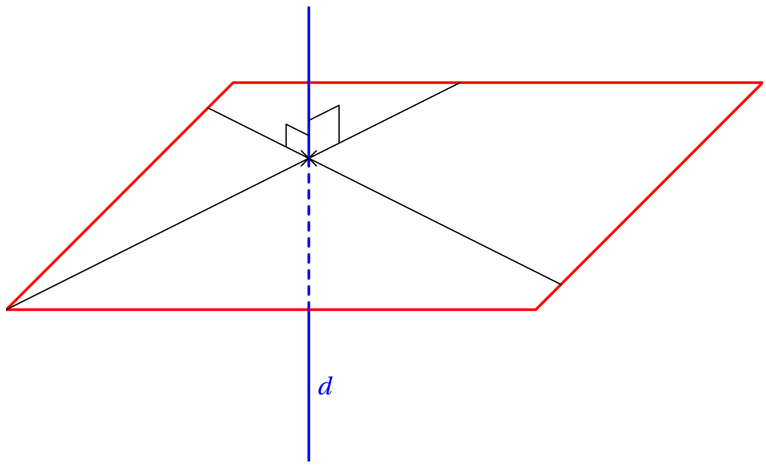
Exemple 3
En reprenant la figure de l'exemple 2, on place K le milieu de $[EF]$. On a :

- Les droites (CD) et (AB) sont parallèles ; (IJ) est perpendiculaire donc orthogonale à (AB). Donc (IJ) et (CD) sont orthogonales.
- Les droites (AE) et (CD) sont orthogonales (car (DH) est perpendiculaire à (CD) et parallèle à (AE)) ; (IK) est parallèle à (AE) donc elle est orthogonale à (CD).
- (IJ) et (IK) sont orthogonales à (CD) pourtant, elles ne sont par parallèles car sécantes en I.



4.2 Droite perpendiculaire à un plan

Définition 4
Une droite d est dite *perpendiculaire* au plan $\mathscr{P}$ si elle est orthogonale à deux droites sécantes de $\mathscr{P}$. On dit aussi que d est orthogonale à $\mathscr{P}$.



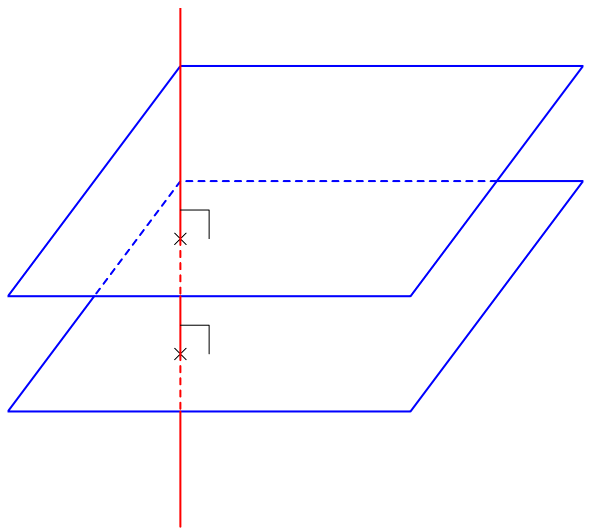
Exemple 4
En reprenant l'exemple 3, la droite (CD) est perpendiculaire au plan (IJK) car elle est orthogonale à (IJ) et à (IK).

Propriété 4

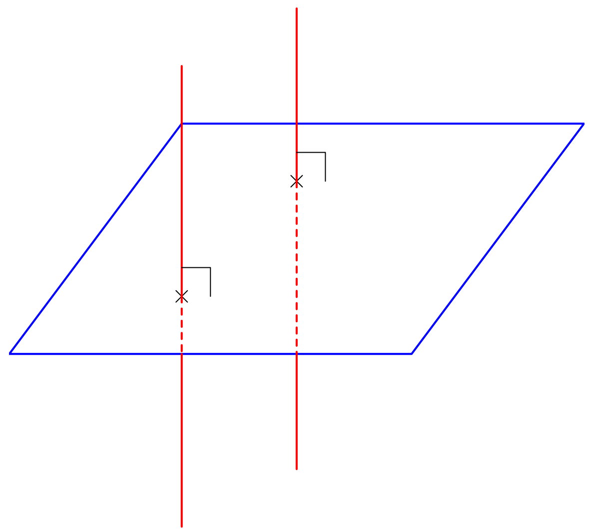
- Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite, alors ils sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles alors toute droite perpendiculaire à l'un est aussi perpendiculaire à l'autre.

Propriété 5

- Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, alors elles sont parallèles.
- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.



Propriété 4



Propriété 5

Théorème 5
Si une droite est perpendiculaire à un plan en un point A, alors elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan passant par A.

Conséquence :
Si une droite est perpendiculaire à un plan alors elle est orthogonale à toutes les droites du plan.

Table des matières