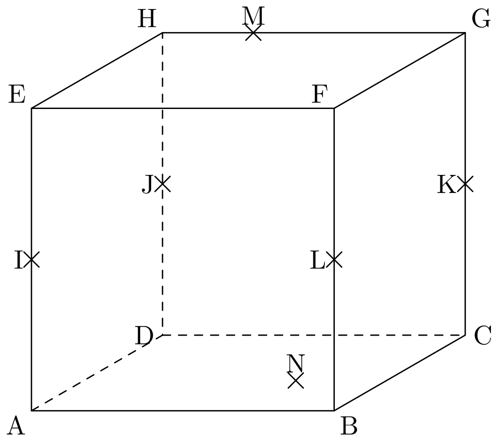
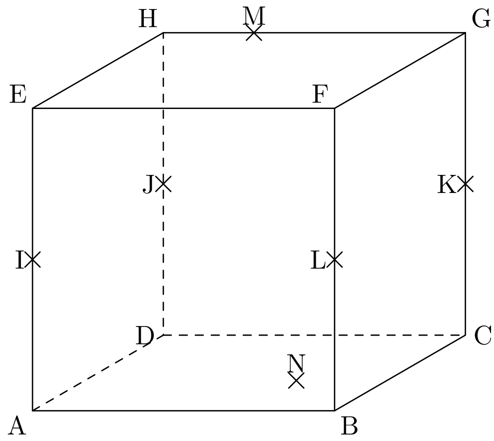
1 Positions relatives

Sur la figure[1] ci-dessous, $ABCDEFGH$ est un cube. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes $[AE]$, $[DH]$, $[CG]$ et $[BF]$. Le point M est sur l'arête $[HG]$ et le point N est sur la face $ABCD$.





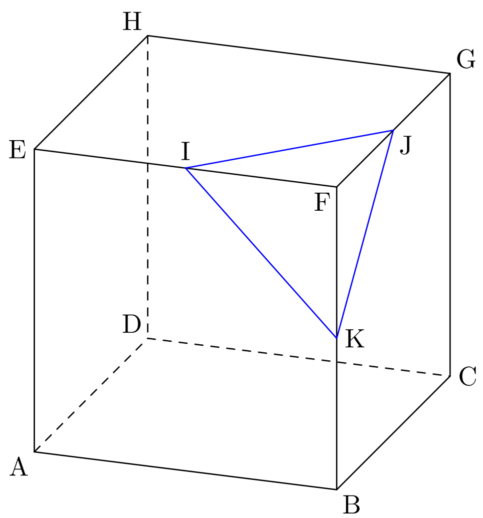
1. Donner la position relative la plus complète possible des couples d'objets proposés (on écrira une phrase utilisant les mots de vocabulaire *coplanaires*, *parallèles*, *sécants*, *confondus*, *inclus dans*, *orthogonales(aux)* et *perpendiculaires*) :
   (a) (HJ) et (LB) : ....
   (b) (HJ) et (FG) : ....
   (c) (GL) et (BC) : ....
   (d) (EI) et (JB) : ....
   (e) (FL) et (AB) : ....
   (f) (EC) et (GA) : ....
   (g) (HIL) et (FG) : ....
   (h) (IFG) et (KD) : ....
   (i) (DN) et (EFM) : ....
   (j) (HJ) et (IDA) : ....
   (k) (ADN) et (GK) : ....
   (l) (FIJ) et (ADE) : ....
   (m) (GIL) et (ABK) : ....
2. Construire le point d'intersection de (MJ) et (ABC).
3. Tracer la droite d'intersection des plans (AMF) et (EMG).
4. Construire la droite d'intersection des plans (BNF) et (EFG).
5. Même question pour (IJM) et (LKM).

[1] Les deux figures sont identiques mais elles vous permettront de dessiner sur l'une tout en gardant un oeil sur la figure initiale.

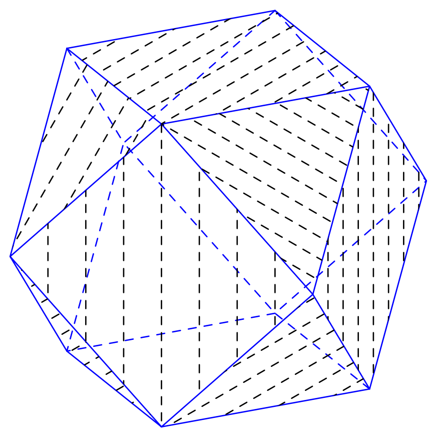
2 Cuboctaèdre

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté 4 cm (figure ci-après). On place les points I, J et K milieux respectifs des côtés $[FE]$, $[FG]$ et $[FB]$.

1. Dans le cube, quel est le nombre de sommets (que l'on notera s) ? Le nombre d'arêtes (que l'on notera a) ? Le nombre de faces (que l'on notera f) ? Calculer $s - a + f$.
2. De quelle nature est le triangle IJK ? Le construire en vraie grandeur. Calculer son aire.
3. Comment s'appelle le solide $FIJK$? En construire un patron. Dans ce cas également, calculez $s - a + f$.
4. Calculer le volume de $FIJK$. En déduire la hauteur du sommet F par rapport à la base IJK.
5. Déterminer le volume exact du solide obtenu en enlevant le solide $FIJK$ du cube. Dans ce cas encore, donner le nombre de faces, d'arêtes et de sommets, et calculer $s - a + f$.
6. On enlève ainsi les huit « coins » du cube $ABCDEFGH$, pour obtenir le solide ci-après.
   a. Calculer $s - a + f$ pour ce nouveau solide (appelé « cuboctaèdre », voir ci-dessous).
   b. Calculer le volume de ce solide. Calculer son aire latérale.
   c. Construire un patron de ce solide.



Le cube de départ

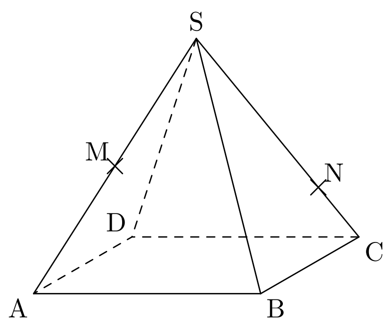


Le cuboctaèdre

3 Intersections. Sections

Exercice 1.
$SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée. M est le milieu de l'arête $[SA]$ et N est le point de l'arête $[SC]$ tel que $SN = \frac{3}{4}SC$.

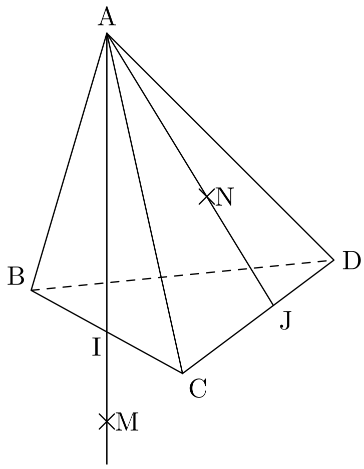
1. Démontrer que les droites (MN) et (AC) sont sécantes.
2. Construire leur point d'intersection.



Exercice 2.
Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un tétraèdre. I est un point de $[BC]$ et J un point de $[CD]$.
M est un point de $[AI)$ qui n'est pas sur $[AI]$ et N est un point de $[AJ]$.

1. Quelle est l'intersection des plans (BCD) et (AIJ) ? Justifier.
2. a. Montrer que les points M, N, I et J sont coplanaires.

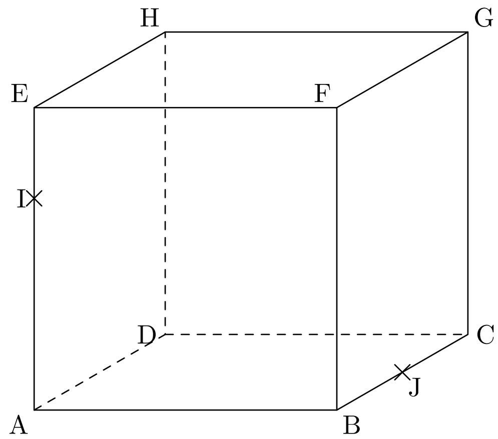
   b. On note P l'intersection de (MN) avec le plan (BCD). Montrer que $P \in (IJ)$. En déduire la construction de P.



Exercice 3.
Sur la figure ci-contre, $ABCDEFGH$ est un cube. I est un point de l'arête $[AE]$ et J un point de l'arête $[BC]$.

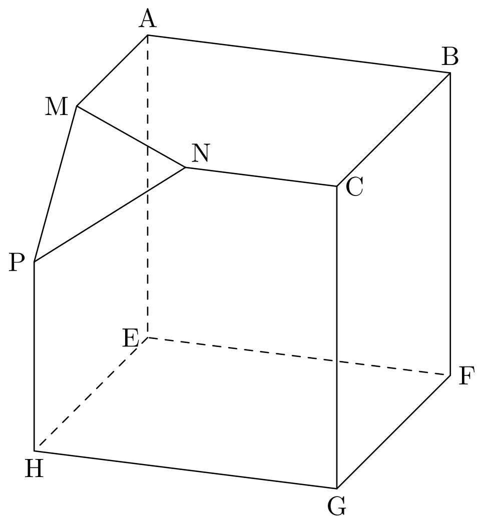
1. a. Montrer que I appartient au plan (AEJ).

   b. Montrer que J appartient au plan (BCI).
2. En déduire l'intersection de (AEJ) et (BCI).
3. Construire la section du cube par le plan (IJH).



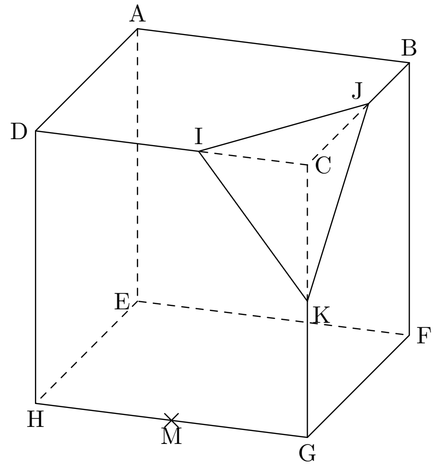
Exercice 4.
On a tracé ci-contre un cube dont on a coupé un coin.

1. Tracer la section de ce cube par le plan parallèle au plan MNP et passant par C.
2. On donne les longueurs suivantes :
   $AB = 8$ cm, $AM = 5$ cm, $CN = 4$ cm et $HP = 5$ cm. Construire le triangle MNP en vraie grandeur.
3. Quel est le volume du solide tracé ci-contre ?

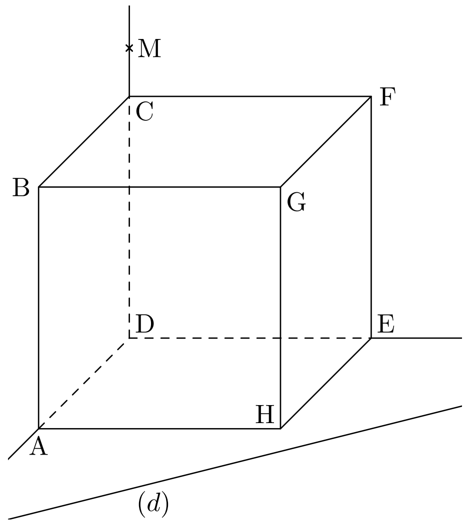


Exercice 5.
Sur la figure ci-contre on a tracé un cube tronqué. C est le sommet du coin coupé et M le milieu de $[HG]$.

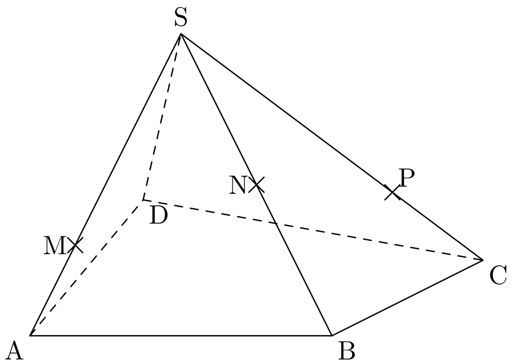
1. Tracer la section du solide par le plan ACM.
2. Tracer la section de ce solide par le plan parallèle au plan ACM et passant par K.



Exercice 6.
$ABCDEFGH$ est un cube. La droite (d) fait partie du plan (ADE). M est un point de la droite (DC).
Construire la section du cube par le plan contenant la droite (d) et le point M.



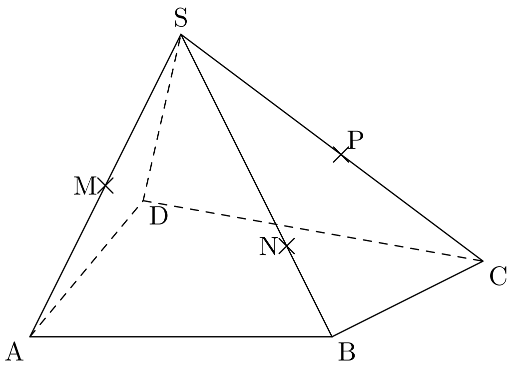
Exercice 7.
Sur la figure ci-dessous, on a tracé une pyramide $SABCD$ à base quelconque. Le point M est sur $[SA]$, le point N sur $[SB]$ et le point P sur $[SC]$.



1. a. Construire le point I intersection des droites (MN) et (AB).
   b. Construire le point J intersection des droites (NP) et (BC).
   c. Tracer la droite d'intersection des plans (MNP) et $(ABCD)$. Justifier.
2. On note respectivement K et L les intersections de (IJ) avec (AD) et (CD).
   a. Déterminer l'intersection des plans (MNP) et (SAD). Justifier.
   b. Déterminer l'intersection des plans (MNP) et (SDC). Justifier.
3. Déduire des questions précédentes le section de la pyramide par le plan (MNP).

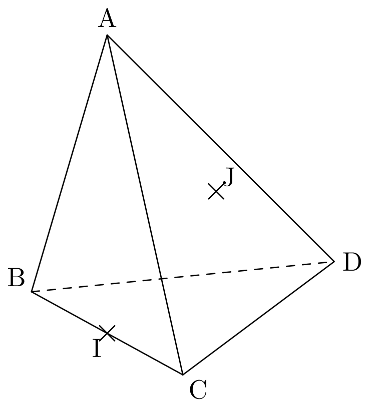
Exercice 8.
Sur la figure ci-dessous, on a tracé une pyramide $SABCD$ à base quelconque. Le point M est sur $[SA]$, le point N sur $[SB]$ et le point P sur $[SC]$.

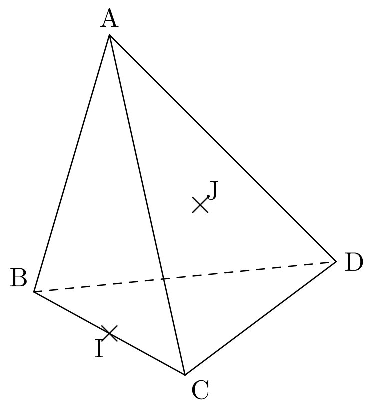
1. a. Construire le point I intersection des droites (MN) et (AB).
   b. Construire le point J intersection des droites (NP) et (BC).
   c. Tracer la droite d'intersection des plans (MNP) et $(ABCD)$. Justifier.
2. Soit L le point d'intersection des droites (IJ) et (CD). Soit Q le point d'intersection de (PL) et (SD).
   a. Justifier que le point L appartient aux plans (MNP) et (SCD).
   b. Quelle est alors l'intersection du plan (MNP) avec la face SCD de la pyramide ?
   c. Quelle est alors l'intersection du plan (MNP) avec la face SAD de la pyramide ?
3. Tracer la section du plan (MNP) avec la pyramide.



Exercice 9.
Sur les figures ci-dessous, $ABCD$ est un tétraèdre. I est le milieu de $[BC]$ et J est un point de la face (ACD) distinct de A.

1. Construire l'intersection des plans (AIJ) et (BCD).
2. a. Les plans (AIJ) et (ABD) sont-ils toujours sécants ? Justifier.
   b. Dans chacun des cas ci-dessous, construire cette intersection.





Quelques figures supplémentaires pour les « essais » :